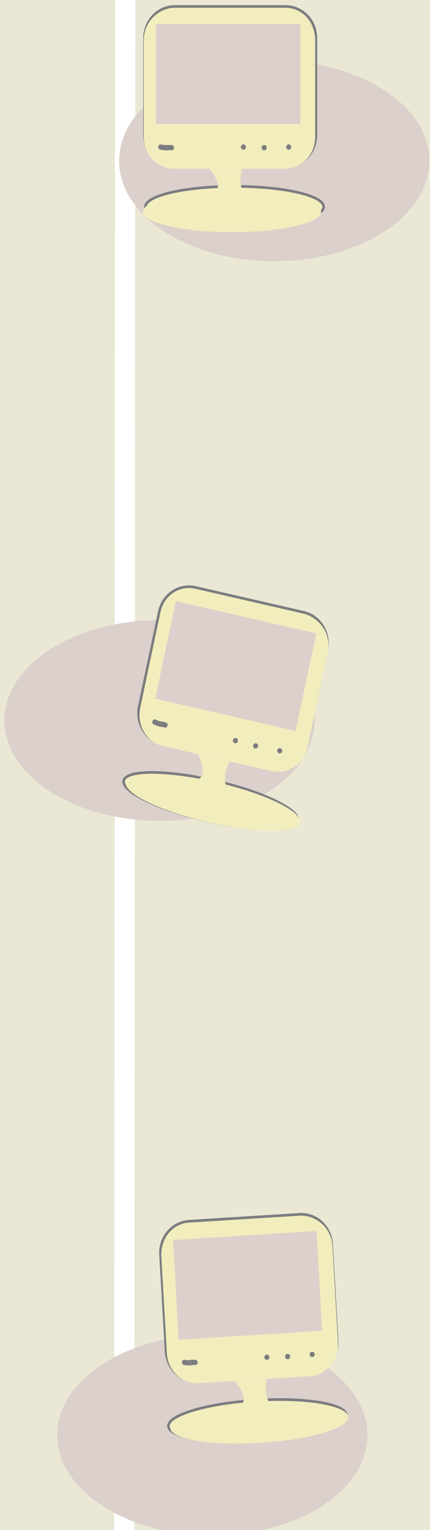


Datorstödd *eller* datorstörd matematik-undervisning?

Högskoleverkets skriftserie 1999:4 S

HÖGSKOLEVERKET
National Agency for Higher Education

Datorstödd *eller* datorstörd matematik-undervisning?

Högskoleverket 1999

Högskoleverket • Birger Jarlsgatan 43 • Box 7851, 103 99 Stockholm
tfn 08-453 70 00 • fax 08-453 70 50 • e-post hsv@hsv.se • www.hsv.se

Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning?
Producerad av Högskoleverket i april 1999
Högskoleverkets skriftserie 1999:4 S
ISSN 1400-9498
ISRN HSV-SS--99/4--SE
Innehåll: Författarna
Grafisk form: Högskoleverkets informationsavdelning
Tryck: Printgraf, Stockholm, maj 1999

Innehållsförteckning

Förord

Utvecklingen av datorbaserade matematikverktyg och undervisningsprogram i matematik påverkar i allt större grad både form och innehåll i den grundläggande matematikundervisningen vid svenska universitet och högskolor. En kartläggning genomförd 1998 på initiativ av Grundutbildningsrådet visade att datorstöd förekommer i ungefär hälften av alla matematikkurser i grundutbildningen. Det framgick också att åsikterna bland lärare varierar mycket när det gäller omfång och form för en effektiv datoranvändning i matematikundervisningen.

Högskoleverket (Grundutbildningsrådet) inbjöd därför till ett idé- och diskussionsseminarium om datoranvändning i högskolans undervisning i matematik och matematisk statistik. Seminariet ägde rum i Sigtuna den 10–11 september 1998 och samlade ca 80 deltagare med stor spridning över högskolorna i landet. Programkommitté var Grundutbildningsrådets referensgrupp för matematik* under ledning av professor Hans Wallin. Planeringsarbetet inför seminariet genomfördes av Christer Bergsten (smk), Gerd Brandell, Eva Gunnarsson, Johannes Hylander, Erik Lindgren och Johan Tysk.

Denna skrift innehåller dokumentationen från seminariet och har sammanställts och redigerats av Christer Bergsten. För innehållet står författarna och för den grafiska formen svarar Högskoleverkets informationsavdelning.

Seminariet syftade till att

- ge en samlad information om datoranvändningen i matematikundervisning vid olika universitet och högskolor i Sverige,
- ge tillfälle till en samlad kritisk diskussion om hur datoranvändning kan påverka kvaliteten på matematikundervisningen,
- ge tillfälle till idéutbyte och inspiration till fortsatt utveckling av ett effektivt datorstöd i matematikundervisningen.

---

* Grundutbildningsrådets referensgrupp för matematik inrättades i september 1997 med följande ledamöter: professor Hans Wallin (ordf.), univ. lektor Christer Bergsten, univ. lektor Philip Brenner, univ. lektor Gerd Brandell, studerande Eva Gunnarsson, professor Sture Hägglund, univ. lektor Calle Jacobsson, studerande Erik Lindgren, professor Georg Lindgren, univ. lektor Anders Tengstrand samt univ. lektor Johan Tysk. Sekreterare är Johannes Hylander, Grundutbildningsrådet.

Programmet för seminariet innehöll gemensamma föreläsningar, presentationer från olika högskolor i parallellprogram, korta presentationer i posterform av idéer och aktiviteter med datorstöd, samt arbetsgrupper där tillfälle gavs till en fördjupad diskussion kring olika intresseområden. Programkommittén vill här tacka medverkande och deltagare för att de alla bidrog till att göra seminariet trevligt, intressant och givande! Vi vill också tacka Högskoleverket för den ekonomiska uppbackning som gjorde det möjligt att genomföra seminariet.

Vår förhoppning är att seminariet stimulerat till fortsatt diskussion och utveckling av matematikundervisningens kvalitet vid svenska högskolor.

Linköping 1999-02-15
Christer Bergsten

Se vidare internetadressen: www.hgur.se/general/matte/members.htm
E-post till hela referensgruppen:
E-post till Johannes Hylander: johannes.hylander@hsv.se
Adress till Johannes Hylander: Grundutbildningsrådet, Box 7851, 103 99 Stockholm

Summary and abstracts in English

The development of computer based mathematical tools and educational software for mathematics has an influence on both the form and content of undergraduate mathematics education. A survey study, which was performed in 1998 (see the paper by Bergsten in this volume), showed that approximately half of the undergraduate mathematics courses in Sweden had some form of computer support. However, the views among teachers on how an efficient use of computers in mathematics education should look like differed a lot.

The Council for the Renewal of Undergraduate Education of The National Agency of Higher Education in Sweden invited to a seminar on the use of computers in undergraduate mathematics education. The seminar, which took place in Sigtuna, Sweden, September 10-11 1998 with approximately 80 participants from different universities and university colleges in Sweden, was arranged by the Reference Group for Mathematics of The Council for the Renewal of Undergraduate Education, chaired by professor Hans Wallin. The members of the executive programme committee were Christer Bergsten (chair), Gerd Brandell, Eva Gunnarsson, Johannes Hylander, Erik Lindgren, and Johan Tysk.

This volume, *Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning?* (Computers in mathematics education – a help or a hindrance?), which includes the proceedings from the seminar, was edited by Christer Bergsten.

The aims of the seminar were:

- to provide information on the use of computers in mathematics education at different universities and university colleges in Sweden,
- to give an opportunity for a critical discussion on how the use of computers can influence the quality of mathematics education,
- to give an opportunity to share ideas and give incitements for the further development of efficient use of computers in mathematics education.

The programme of the seminar included plenary talks, parallel sessions with presentations from different universities/university colleges, a poster session, and working groups on different topics related to computer supported mathematics education.

In the first plenary talk Colette Laborde discussed and showed examples of how a dynamic computer software in mathematics can be used to support the interplay between models and of using geometrical models in various fields of advanced mathematics, to support students' flexibility or ability to move between different mathematical settings (or models). Christer Bergsten presented in the second plenary talk results from a recent survey study on the use of computers in undergraduate mathematics education in Sweden.

Modelling activities were also discussed by Morten Blomhøj (the full paper is not included in the proceedings), who shared experiences from Roskilde University (Denmark) of mathematical modelling as a computer based activity.

In one of two talks on the use of computers in the teaching and learning of mathematical statistics Anders Holtsberg discussed different kinds of statistical software and shared experiences from Lund University. Esbjörn Ohlsson stressed in his talk how important it is, in a learning situation, that the student is in control of what is happening in the computations, and that a spreadsheet is a perfect tool to achieve this.

There were also two talks on teacher education in mathematics. Kerstin Ekstig reported that the main purposes of computer use in the teacher training courses at Uppsala University are to increase the students' understanding of mathematical concepts and to improve their problem solving ability. Mikael Holmquist and Thomas Lingefjärd used technology to model difficult mathematical problem situations for teacher students and discussed how that influenced their views of mathematics.

In their talks Bo Johansson, Gísli Másson, Ingemar Nåsell, Håkan Sollervall, and Peter Wingren all reported from work in progress on the role of computers in the teaching of mathematics at each of their departments.

Inge Söderkvist described the aims, form and contents of a special course for computer based mathematical tools at Luleå University of Technology. Anders Tengstrand gave examples and discusses experiences from projects at Växjö University where the computer was used as an experimental tool, and Göran Andersson (the full paper is not included in the proceedings) some experimental exercises for engineering students, using the Mathematica notebook.

Abstracts

The use of computers in undergraduate mathematics education in Sweden — A survey study

(Datoranvänding i högskolans matematikundervisning – Resultat från en enkätundersökning)

Christer Bergsten, Linköping University

In order to get an overview of the use of computers and handheld calculators in undergraduate mathematics education in Sweden a questionnaire was distributed in early 1998 to teachers in charge of mathematics and mathematical statistics courses. In mathematics 282 and in mathematical statistics 81 completed questionnaires were received. Computer support had increased the last three years from about 25 % to approximately half of the mathematics courses. Computers were used less in the more theoretical programmes in engineering and science than in shorter engineering programmes and teacher education. Differences in this respect between different kinds of mathematical courses were not great, apart from more use in courses in applied mathematics and teacher training. There were however major differences between universities regarding how much computers were used in mathematics courses, as was the case with the kinds of used software. The most commonly used mathematical software were Matlab, Maple and Mathematica, in that order. The dominant form of computer use was computer labs. Assigned tasks and projects were less common, and demonstrations in class by the teacher were rare. A growing use of web-pages for course information and distribution of lab tasks could be noted.

The reasons for using computers in mathematics courses were many and varied, and could be classified as pedagogical, informational, pragmatical, vocational, and computer knowledge. Reasons for not using the computer concerned lack of resources (financial, staff, and time), ineffectiveness (a waste of time), lack of appropriate software and suitable forms, not needed, or by tradition.

Handheld calculators, including graphical, are allowed on written exams only in approximately a third of the mathematics courses, even less in the more theoretical programmes. In the basic calculus courses they are almost totally forbidden. Here as well there are major differences between universities. Reasons for not allowing handheld calculators on exams varied, but were mainly pedagogical and pragmatical.

In mathematical statistics the situation is different. Computers are used

in 80 % and handheld calculators almost in 100 % of the courses, and have been used much longer than in mathematics. The dominating software in use are Minitab and Matlab. Reasons given for using computers in mathematical statistics courses concern understanding and increased student activity, that it is necessary in a modern course in this field, and also for preparing the students for the future professional life. Reasons for not using the computer concern understanding, lack of resources (time), that the course is ”theoretical”, and that students have poor knowledge in programming.

It is argued, in the discussion, that the step from the potential advantages of using the computer in mathematics education to designing actual student activities that work well and are worthwhile, is far from direct and easy. Critical factors in this process are the knowledge and creativity of the teachers.

Bridging different domains of mathematics through computer based dynamic modelling

Colette Laborde, Université Joseph Fourier, Grenoble

University students are often told that the mathematical theories and methods they learn are tools for solving real complex problems. But that is not an easy task for many undergraduate students, who encounter great difficulties in co-ordinating all mathematical resources they have and in moving from one setting to another one. One of their major difficulties lies in the absence of flexibility between settings (or models). It is also very likely that they especially lack abilities to represent geometrically algebraic objects and operations.

The availability of software may deeply change the situation: thanks to their calculating and graphing power, they allow students to use visualisation tools, to move between models and to spend part of the time on the modelling and interpreting phases.

The present paper aims at presenting some examples of interplay between models and of using geometrical models in various fields of advanced mathematics made possible by this new kind of computer environment with direct manipulation: complex numbers, linear algebra, and differential equations.

All these examples are based on the following assumptions:

- mathematical methods may be used outside the purely theoretical framework from which they originate
- there are multiple ways of mathematically modelling a situation
- there is no complete congruence between different models, and each model has its specific potentialities in terms of giving evidence of mathematical phenomena; this is why it is fruitful to move from one model to another one

Laboratory math — Some examples with Mathematica
(Laborativ matematik – Några exempel med Mathematica)
Göran Andersson, KTH – Kista

The talk discussed some experimental exercises for engineering students. These exercises (a Mathematica notebook) can be found at
http://www.isk.kth.se/~goeran/arkiv/foredrag/Sigtuna9809/

Mathematical modelling as a computer based student activity - experiences from Roskilde University
Morten Blomhøj, Roskilde University

Development of the students' competencies in setting up, analysing and criticising mathematical models is a central part of the two year introductory study programme for science at Roskilde University. To further support this focus on modelling competencies we are developing a computer based elementary modelling course covering half of the study time in two semesters. The course is organised around a series of modelling problems with an increasing degree of complexity. Nearly all the modelling problems have to do with compartment modelling of dynamical systems using differential equations. The idea is to introduce the mathematical theory, i.e. analytic and numerical methods and naive qualitative theory for systems of differential equations, when, and not before, the students feel a need for these techniques in their modelling work. Having tested several software packages that support numerical and graphical analysis of differential equations we decided to use MatLab, a powerful vector based numerical tool.

The experiences from running the course twice in slightly different forms show that the students find the course very relevant and exciting, but also very difficult. During the course the students are introduced to three new domains of knowledge; the notion of compartment modelling, differential equations and the language of MatLab. This causes some frustration especially in the beginning of the course. However evaluations show that during the course most of the students (80 % out of totally 120) develop competencies in setting up and analysing mathematical models for simple dynamical systems.

In relation to the development of the course I am working with the following five research questions, here listed with some preliminary answers.

- How do students construct the concepts of mathematical models and modelling?
  Slowly and indirectly through work with problems that involve setting up or analysing mathematical models.
- What types of different competencies are involved in modelling activities?
  Conceptual understanding of the system. Technical mathematical competence of understanding and analysing the model, including the use of advanced software such as MatLab. Reflective competence which allows critique of the model both within the domain of the model and within the domain of the system.
- Can modelling activities facilitate the students acquisition of mathematical concepts?
  At least for some students the modelling activities can add personal meaning to the mathematical concepts, and modelling activities can create personal motivation for studying mathematics.
- How can progress in the students modelling activity be described?
  A list of criteria for progress in modelling activities could be
  – understanding the model, the ability to read meaning into the mathematical representation of the model
  – shifts between various representations of the model
  – differentiation between the three domains: reality, system and model
  – differentiation between different types of assumptions
  – cycling in the modelling process
  – interpretation of model results
  – critique of the modelling process.

Using computers in mathematics in teacher training

(Datoranvändning i matematik i lärarutbildningen)

Kerstin Ekstig, Uppsala University

Use of computers has been integrated in the mathematics courses in the teacher training program at Uppsala University. The main purpose is to increase the students' understanding of mathematical concepts and to improve their problem solving ability. Problem solving involves a lot of creative activities such as devising a solving strategy and analysing the result. Carrying out the plan often implies the performance of extensive calculations and other routine operations. For many of the students this routine work may be so laborious that they are not able to think of and understand the mathematical ideas behind it at the same time. An important reason for the use of computers in this context is that the students can concentrate on the mathematical concepts involved in the problem.

Computer based problem solving demands a new kind of problems than those predominating in ordinary textbooks. Many of these will turn out to be trivial when powerful computing aids are used. More extensive and complex problems are needed where the solving requires the student to combine knowledge from the current course with mathematical reasoning and with computations carried out on the computer.

An important advantage with computer usage is that the students will get the opportunity to work in an exploratory way and to test different hypotheses. By working this way they may discover patterns and general relations.

The students' attitude towards computer usage is of great importance. A common experience from other attempts to use computers in mathematics teaching is that some of the students, often quite a small part, are very satisfied but that a majority of them find the computer applications mostly an additional burden. However, according to my own experience it is possible to construct computer applications that are considered to be a valuable support in the course by almost all students. This requires that the computer applications form an integrated part of the teaching and that it enlightens important parts of the course under study, and that the computer software used is easy to learn how to handle. The student must from the very beginning be able to concentrate on the problem solving without being diverted too much by trouble with handling the computer. This is of particular importance for students participating in teacher training and in other less mathematics-dominated programs.

Computer programs from which I have good experience are in the first place the computer algebra software Derive and the spreadsheet software Excel. Some examples of the use of these are demonstrated in this paper.

Computer supported mathematics in teacher training

(Datorstöd i blivande matematiklärares utbildning)

Mikael Holmquist and Thomas Lingefjärd, Göteborg University

Given an opportunity to use technology to model difficult mathematical problem situations, teacher students at the Göteborg University reacted by welcoming realistic work done in project teams or by complaining about having to take responsibility for their own learning. They criticised the problems of being unclear or too open which seemed to reflect their discomfort in having to argue for a best solution rather than just finding one solution. The changes in instruction from traditional lecturing to a more problem-based open dialogue resulted in a transformation of authority in which results from technology were not critically questioned, suggesting that issues of responsibility and authority need to be made explicit in the instructions. The students' view of mathematics as an isolated subject with one correct answer to each problem appeared to change to an insight into mathematics as a living tool within all sciences. The way technology affects the teaching and learning of mathematics is a growing research field with many variables, of which we have mentioned a few in this paper.

Statistical software in statistics education at Lund University

(Statistikprogram i undervisningen i Lund)

Anders Holtsberg, Lund University

Students of statistics must become familiar with professional computer tools for statistic modeling and analysis. However, there are many different kinds of statistical software as well as user categories with different needs. Some types of software are discussed and experiences are shared.

In statistics the computer is a necessary tool, not primarily a pedagogical spice but really a must. Due to this fact it is necessary to use real tools early in education, tools that the students will continue to use in real life. At the

Department of Mathematical Statistics at Lund University many different computer programs are used for various courses, based on what kind of computer programs the students know or should know. Experience shows two important points. Firstly, the data materials and the situation should be real, not only the tool. Real data are interesting, simulated data are not. Secondly, the intention and purpose of the computer exercises must be very clearly expressed since this is not obvious to many students.

Changes in mathematical education

(Matematikutbildning i förändring)

Bo I Johansson, Chalmers University of Technology and Göteborg University

Changes in mathematical education that are taking place at Chalmers University of Technology and Göteborg University are described together with an historical background. One goal is to create a synthesis between mathematics, numerical analysis and computations. The use of computers is important in this work.

Mathematics is becoming a more experimental subject as a consequence of the availability of computers. They create an opportunity to make mathematics more exciting and experimental, and thereby improve mathematical understanding. Besides being a tool for experiments the computer is also a powerful tool for symbolic as well as numerical calculations.

This new era in mathematical education opens up several possibilities. First, computers offer a new way to attain a deeper understanding of mathematics, and a potential to increase the standard of problem formulation and solving. Second, the computer itself is a tool to study problems and their solutions in ways not possible before. Third, it is an excellent tool to use modelling as a bridge between mathematics and natural sciences as well as technical subjects.

A lot of work has been done in order to incorporate the computer as a natural tool into mathematical education. In order to make this transition successful we have already, at least partly, integrated numerics with classical mathematics, in that we consider it natural to study both qualitative and quantitative aspects of mathematics side by side. We have just taken a first step into a new way of teaching mathematics.

Computer supported mathematics in the project programme

(Datorstöd i projektlinjens matematikutbildning)

Gísli Másson, Stockholm University

This paper describes the results from giving computer-supported first year mathematics courses at the project programme in mathematics, physics and mathematical statistics at Stockholm University. The viewpoint taken is that the role of computers in mathematical education is twofold: On one hand students must learn how to use computers as tools; on the other hand computers can facilitate the understanding of various mathematical concepts. The conclusion of the paper is that while teaching the students how to use computers as tools worked rather well, trying to use them as a teaching aid was mostly unsuccessful. One of the primary reasons for this was that the software used for the computer labs was too advanced. Mathematical content tended to get lost in syntax and other computer related problems. A suggested solution to the problems observed is to use small, specialized programs with a very simple user interface, which do little or nothing else than explain a single mathematical concept.

Computer labs in mathematics education at the Royal Institute of Technology

(Datorlaborationer i matematikundervisningen vid KTH)

Ingemar Nåsell, KTH (Royal Institute of Technology)

Since 1994 all undergraduate mathematics courses at KTH (Royal Institute of Technology in Stockholm) include computer labs. Our teaching of mathematics aims at developing, in students, both a conceptual understanding and an ability to use mathematical methods in different kinds of technical applications. The arrival of computer software with both symbolic and numerical facilities will lead to a change in the balance between these two aims. The new tools lead to a questioning of the traditional goals of mathematics education.

The aims of using computer labs are twofold: to make the students familiar with the software (in our case Maple) which also is used in other courses, and to increase the students' understanding of mathematical concepts and relations. The latter is facilitated by the graphical facility of the software that supports intuitive understanding.

Important factors for a successful use of computers in education are availability of computers and software for both students and teachers, user support, a continuous revision of computer labs, and special introductory courses.

Our experience shows that there is a strong connection between student appreciation of the computer labs and the level of their own knowledge of computers. We have also found that the engagement, knowledge and attitude of the teachers are important factors. Success in the use of computer labs requires that the labs are integrated with the course material.

EXCELlent Exercises or Exaggerated Examination?

(Excellent exercis eller exagererad examination?)

Esbjörn Ohlsson, Stockholm University

Educational use of statistical software packages enables exercises where realistic data sets can be analysed in a semi-professional way. Exclusive use of “black box” packages in a mathematical statistics course may result in severe loss of understanding of concepts and techniques. Manual computation is an important tool in statistical education, even though it represents an out-of-date technique from the view point of statistical practice.

“Manual” in this case really means “with a pocket calculator”. Without loss, the pocket calculator can be replaced by a spreadsheet program, such as Excel. The spreadsheet leaves the student in perfect control of the situation and, in our opinion, enables an even better understanding of statistical methods and the underlying concepts than pocket calculator computation. An example with variance computing is given to illustrate this point. Spreadsheets allow for “manual” computation in situations where the arithmetic workload is too large for the pocket calculator.

We also discuss the problem that assessment with spreadsheets can become an almost impossible task when the number of students per teacher is large.

One lab in each math course

(En matematiklaboration per kurs)
Håkan Sollervall, Uppsala University

Based on the experiences from some years of computer use in first year undergraduate mathematics courses at Uppsala University, it was decided to revise these activities. Students had to spend a lot of time and effort learning the software, and it was felt that this took too much time from real mathematical training. It was realised that computer labs in mathematics really must support the mathematical development of the students, that the labs should not take too much time and treat only basic components of the course, that focus should be on mathematical content, that students must practice to express themselves mathematically and work ”by hand” as well as with the computer, and that students should get insight into the potentials of the computer as a mathematical tool.

Based on the these ideas, the most appropriate form of computer use chosen at our university was one computer lab in each math course. Detailed lab material was produced, with an introduction to the purpose of computer labs in mathematics, description of mathematical content, general instructions, lab descriptions, useful hints and help-files for software (in this case Maple), advice for writing the lab report, and finally an example of a completed lab report. The lab descriptions include some simple exercises for the students to complete by hand, to make them well prepared for the computer part of the lab. The new lab system was introduced in the fall of 1998, and has not yet been evaluated.

A separate course for computer supported mathematical tools

(En separat kurs för datorstödda matematikverktyg)
Inge Söderkvist, Luleå University of Technology

A short course about computer aided mathematical tools, given at Luleå University of Technology, is presented. Often students use such tools only in courses where other issues are of more interest and the focus is not on how to use the tools. The aim of this course is, however, to give the students an overview of existing tools and to provide experience of practical use of tools such as Matlab and Maple. Prior to the course students have one year of mathematics studies in the engineering programs. The focus of the course is on how to use the tools, and to give students such familiarity with these tools that they later on can use them when needed. Examination of the course is made by assigned tasks on problem solving with Matlab and Maple.

Information about the course can be found on the web-page http://www.sm.luth.se/~inge/courses/MAM098/MAM098.html

The computer as an experimental tool

(Datorn som experimentverktyg)

Anders Tengstrand, Växjö University

During 1991—97 some projects in the teaching of mathematics were carried through at Växjö university, using continuous assessment, group work, and increased standards on oral and written presentations from the students. The main aim of the projects was to increase the students′ communication skills and creativity. They had to solve and present the solutions of a number of comprehensive problems. It was therefore natural to construct problems where the computer was a tool to see patterns and relations. In this article we give two examples of problems of this kind. Both are geometrical and both give rise to questions of the following kind:

- Is it possible to prove a mathematical proposition with the help of a computer?
- What is a proof?
- Is it possible to create a general theory where the solution of the actual problem is just a special case?

Computers in undergraduate mathematics at the Department of Mathematics, Umeå University.

(Datoranvändning i grundläggande matematikundervisning vid Umeå universitet)

Peter Wingren, Umeå University

From our experience at Umeå University the following should be considered when the use of computers in mathematics education is introduced at a whole department: create a group of pilot teachers, get support from the chairman, learn from other universities, let the faculty take part in a computer algebra systems course, and start with pilot projects. An example of how web site material can be used for introduction of a project about fractals or as an introduction to a linear algebra course is also given. It is very convenient to use illustrations and animations of fractals and applications of fractals to natural sciences and image compression on a website.

Datoranvändning i högskolans matematikundervisning
– Resultat från en enkätundersökning

Christer Bergsten
Linköpings universitet

Sammanfattning

För att få en översiktlig bild av datoranvändningen i den svenska högskolans matematikundervisning genomfördes under våren 1998 en enkätundersökning. Kursansvariga (eller motsvarande) lärare för kurser i matematik och matematisk statistik besvarade frågor om bl.a. typ och omfång av datorstöd och argument för eller emot användningen av datorer i undervisningen. Resultatet kan sammanfattas i bl.a. följande slutsatser: stadig ökning av datoranvändning under de senaste tre åren till ca 50 % av kurserna i matematik och ca 80 % av kurserna i matematisk statistik; stor skillnad mellan olika högskolor; ingen större skillnad mellan utbildningar (lärarutbildningar speciell situation) eller kurser (utom ”tillämpade”); Formerna för datoranvändning varierar i allmänhet inte så mycket; argumenten för och emot datoranvändning i matematikundervisningen varierar men ryms huvudsakligen inom fem till sex kategorier; stor skillnad mellan högskolor i miniräknarpolicy på skriftlig tentamen i matematik, där totalt ca 1/3 av kurserna tillåter miniräknare; argumenten mot miniräknare på skriftlig tentamen i matematik är många och ”motståndet” är starkt på flera håll; det finns ett uttalat intresse hos många lärare att utveckla datorstödet i matematikundervisningen.

Inledning

Tekniska hjälpmedel för beräkningar har använts i matematiken så länge matematiken har funnits. Tidiga exempel på detta är den kinesiska stavaritmetiken (från ca 300 f.Kr., se Thompson 1991, s. 120–121) och olika typer av abakus. Automatiserade beräkningsverktyg för de fyra räknesätten har funnits sedan 1600-talet (Pascal och Leibniz). I gymnasieskolans matematikundervisning användes räknestickan ända in på 1970-talet tills den elektroniska miniräknaren började tas i mer allmänt bruk. Det var först då som den pedagogiska användningen av tekniska hjälpmedel i matematiken på allvar började diskuteras (bl.a. i det s.k. ARK-projektet; se t.ex. af Ekenstam & Greger 1982). Den grafritande miniräknaren har använts i undervisningen sedan slutet av 1980-talet, bl.a. i ett stort upplagt projekt i USA sedan 1986 (Waits & Demana 1993). I Sverige har den använts i ADM-projektet (se nedan) och används nu allmänt på de teoretiska programmen i gymnasieskolan.

Datorn har använts i skolmatematiken i Sverige sedan 1970-talet, bl.a. i det omfattande s.k. ADM-projektet sedan 1986 (se t.ex. Björk & Brolin 1993, 1995; för mer allmänna översikter av datorn i svensk skolmatematik se t.ex. Riis 1987, 1991, Jedeskog 1994, 1996, Dahland 1997). I USA var datorn ett centralt inslag i den ”Calculus Reform” som aktualiserades under den senare hälften av 1980-talet pga. de dåliga studieresultaten i matematik inom högskolan i USA (se t.ex. Douglas 1986, Steen 1988). Det var då framförallt datoralgebrasystem (CAS = Computer Algebra System; dvs. formelhanterande datorprogram i matematik med integrerad numerik, symbolik och grafik) som ansågs ha stora potentiella möjligheter att öka matematikförståelsen, genom att ge studenten mer tid att arbeta med begreppsförståelsen då programmet kunde hantera den algebraiska kalkylen. Även integrationen av matematikens numeriska, symboliska och grafiska uttrycksformer inom en och samma programvara ansågs ha stor pedagogisk betydelse (se t.ex. Hillel 1991). Sådana program började utvecklas redan på 1960-talet (*Reduce*, *Macsyma, Formac*), i ett mindre mer lättillgängligt format i slutet av 1970-talet (*muMath*). Med utvecklingen av programmen *Derive* (utvecklat ur *muMath*), *Maple* och *Mathematica* (utvecklat ur *SMP*) under 1980-talet fick denna typ av datorstöd i matematikundervisningen en mer allmän spridning (se Bergsten 1994, för en kort historik av denna utveckling och de erfarenheter som då nåddes, samt Mayes 1997, för en senare uppsummering av forskningsresultat inom detta område). I Sverige har några utvecklingsprojekt med sådana symbolhanterande program genomförts med stöd från Grundutbildningsrådet (se beskrivningar på Grundutbildningsrådets hemsida *www.hgur.se/general/projects/concluded.htm* av projekten av Bergsten 1992/93, Kågesten 1993/94–95/96 och Lindahl 1994/95–95/96). Idag är de den vanligast använda programtypen i högskolans matematikundervisning (se tabell 7 i denna uppsats). Innan de symbolhanterande programmen började användas fanns datorstöd i matematikundervisningen huvudsakligen inom tillämpade matematikkurser och krävde programmeringskunskaper. Ett sådant program är fortfarande, enligt föreliggande undersökning, den mest använda programvaran i högskolans matematikundervisning (dvs. *Matlab*; se tabell 7 i denna uppsats).

Andra programvaror som ofta används av pedagogiska skäl i matematikundervisningen är kalkylprogram (som *Excel*; se uppsatserna av Ekstig och Ohlsson i denna volym) och dynamiska geometriprogram (som *Cabri Géometrie* och *Geometer's Sketchpad*; se uppsatserna av Laborde och Tengstrand i denna volym).

Av de två former av datorstöd och miniräknarstöd som brukar nämnas i samband med matematikundervisning, dvs. datorn/miniräknaren som beräkningsstöd respektive pedagogiskt stöd, är det värdet av den senare formen som oftast diskuteras. Underlättas lärandet av matematik, och/eller ökas kvaliteten i matematikkunskaperna med dessa stöd, jämfört med "traditionell" matematikundervisning där huvuddelen av elevens/studentens arbete sker med hjälp av lärarledd klassrumsundervisning med lärobok och papper och penna? Trots den nu ganska långa erfarenhet av datorstöd i matematikundervisning som finns, både nationellt och internationellt, är osäkerheten fortfarande stor bland många lärare beträffande det pedagogiska värdet av olika former av datorstöd. Forskningen ger ännu heller inget enkelt svar på denna fråga (se t.ex. Kaput 1992, Balacheff & Kaput 1996, Noss & Hoyles 1996, Ruthven 1996, Heid 1997, Mayes 1997). I en översikt av forskningsresultat skriver Niss (1998) om IT i matematikundervisningen:

> *Research shows that it has opened avenues to new ways of teaching and learning which may help to greatly expand and deepen students' mathematical experiences, insights, and abilities. However, it further shows that this does not happen automatically but requires the use of technology to be embedded with reflection and care into the overall design and implementation of teaching-learning environments and situations, of which IT-activities are but one amongst several components.* (s. 18, kursivering i original)

Han betonar också att användningen av kraftulla datorverktyg i matematik inte kan ersätta användarens matematikkunnande, utan snarare ställer ökade krav på undervisning och lärande i matematik.

Bakgrund

Grundutbildningsrådet inrättade i september 1997 en referensgrupp för matematik för att främja utvecklingen av matematikämnet och gav samtidigt författaren till föreliggande rapport i uppdrag att kartlägga det pedagogiska användandet av datorer inom matematikämnet. Målet med kartläggningen var att få en samlad bild av omfattningen och syftena med datorstödet i högskolans matematikundervisning, för information och som stöd för fortsatt arbete. Det preliminära resultatet från den undersökning som genomfördes presenterades för referensgruppen i februari 1998, som då beslutade att arrangera en konferens om datoranvändningen inom matematikutbildningen för att hjälpa matematikinstitutionerna att gå vidare i användandet av datorer i undervisningen. Föreliggande volym utgör dokumentationen från denna konferens.

Metod

För att få en översiktlig bild av datoranvändningen i den svenska högskolans matematikundervisning valdes enkätundersökning som metod. Med relativt få frågor kan man då snabbt belysa flera aspekter av datoranvändningen. För att få en bild av datorstödets omfattning och utformning inom olika kurser i matematik och matematisk statistik valdes kursansvariga eller motsvarande som målgrupp för enkäten. Alternativet att bara skicka en enkät till en central person på varje institution (studierektor eller motsvarande) förkastades främst av skälet att det ansågs viktigt i en undersökning av denna typ att få höra den enskilde lärarens röst. Den kursansvarige har också större detaljkunskap om datoranvändningen på den egna kursen och om studenternas upplevelse av dessa inslag i kursen.

De frågor som berördes i enkäten (se bilaga) behandlade bl.a. allmänna uppgifter om kursen, om användning av miniräknare och datorer och argument för/emot dessa, vilka erfarenheterna har varit, samt lärarens deltagande i utvecklingen av datorstöd i matematikundervisning. Enkäten utformades så att det skulle vara möjligt att betrakta resultaten genom olika ”fönster”, dvs. jämföra datoranvändningen mellan olika högskolor, mellan olika utbildningar, mellan olika kurser, etc.

Med hjälp av elektronisk post ansågs det relativt enkelt att nå de flesta kursansvariga i kurser i matematik och matematisk statistik vid landets högskolor. Alternativet att bara skicka enkäten till ett slumpmässigt urval av kursansvariga ansågs för komplicerat (viktning mellan olika typer av kurser etc.), förutom att bortfallsproblemet dessutom skulle kvarstå.

På vissa institutioner (främst vid mindre högskolor) ligger en del tillämpade kurser (som kurser i numeriska metoder och optimeringslära) inom ämnet matematik, medan andra institutioner (främst vid större högskolor) har inrättat särskilda ämnesområden för denna typ av kurser. Det har inte alltid gått att med hjälp av enbart kursens namn avgöra det exakta kursinnehållet, särskilt som en del kurser dessutom är breda till sitt innehåll. Här är det därför kursens huvudsakliga inriktning som fått avgöra i vilken kategori den sorterats vid sammanställningen av enkätresultaten. Då undersökningen skulle behandla kurser i matematik och matematisk statistik skickades inte enkäten till ansvariga för kurser som till namnet var ”rent” tillämpade kurser (som kallades t.ex. numeriska metoder eller optimeringslära).

Resultat

Resultaten redovisas i denna översiktliga konferensrapport endast i diagramform med förklarande kommentarer. Totalt skickades enkäter till 533 kursansvariga i ämnena matematik och matematisk statistik, en del av dessa med kursansvar för mer än en kurs. I ämnet matematik grundas resultaten på 282 enkätsvar och i matematisk statistik på 81 enkätsvar (dvs. sammanlagt 363 kurser). Totalt har ca 45 % av de kursansvariga som fått enkäten besvarat den. I resultatredovisningen är det nödvändigt att åtskilja ämnena matematik och matematisk statistik, då datoranvändningen inom dessa discipliner har olika traditioner och syften.

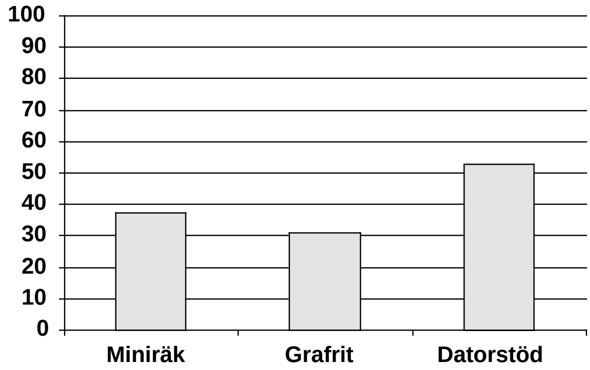
Matematik

Tabell 1 visar antalet enkäter som besvarats för ämnet matematik inom olika utbildningar respektive kurser. Kurskategorin ”övriga” innehåller kurser som delvis är tillämpade och en del kurser inom grundskollärarutbildningen som täcker flera matematiska innehållsområden och som ofta även har metodiskt/didaktiskt innehåll.

Utbildningar		*Kurser*	
Civilingenjör	97	Analys	111
Ingenjör	62	Algebra	33
Mat/Nat	36	Linjär algebra	26
Lärarutbildning	37	Transformkurs	17
Fristående kurs	25	Komplex analys	11
Basår	7	Basår	8
		Övriga	73

Tabell 1 – Antal enkätsvar i matematik inom olika utbildningar respektive kurser

Tabell 2 ger en sammanfattande bild av omfattningen av datorstödet i matematikundervisningen och av användning av miniräknare och grafritande miniräknare på tentamen i matematik.

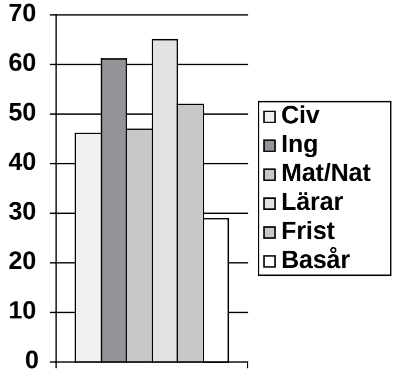


Tabell 2 – Användning av miniräknare, grafritande miniräknare respektive datorstöd på kurser i matematik (% av kurser)

Bland enkätsvaren hade alltså ca hälften av alla kurser i matematik någon form av datoranvändning. Miniräknare är tillåten på tentamen i matematik på bara ca en tredjedel av kurserna. Hur detta fördelar sig mellan utbildningar, kurser och högskolor framgår av den fortsatta resultatredovisningen. Datoranvändningen tas upp först och därefter användningen av miniräknare på tentamen.

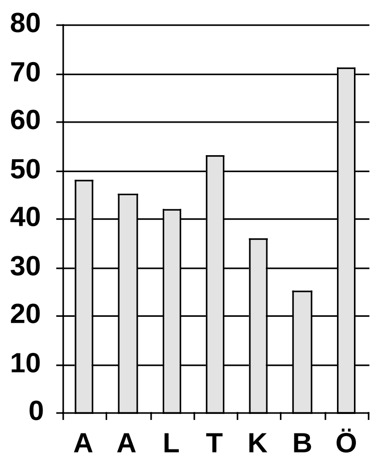
Datoranvändning

Tabell 3 visar omfattningen av datorstödet i matematik inom olika utbildningar, mätt med procent av matematikkurserna inom respektive utbildning där datorstöd utgör ett reguljärt inslag. En observation där är att skillnaderna inte är så väldigt stora (utom för basåret), men att de mer teoretiska utbildningarna har mindre datorinslag än den kortare ingenjörsutbildningen och lärarutbildningen. Inom den senare är ju också kunskap om datorstöd i undervisningen ett undervisningsinnehåll.



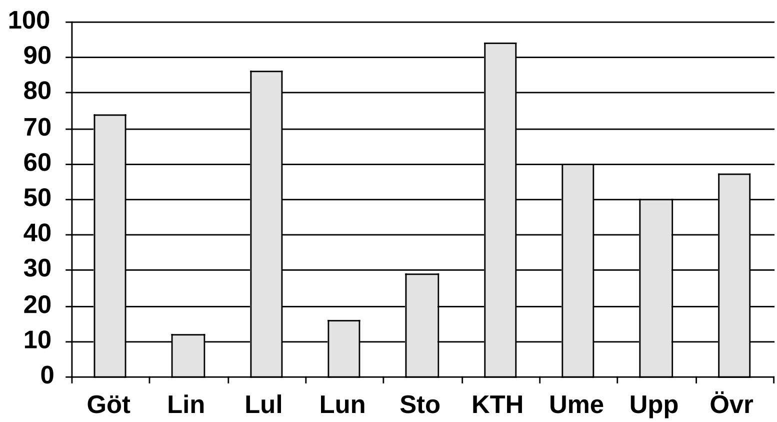
Tabell 3 – Datorstöd i matematik inom olika utbildningar (% av kurser)

Tabell 4 visar andelen (%) av kurserna i matematik där datorstöd används. Skillnaderna mellan kurser är inte så uttalade, utom för basår och kategorin övriga kurser. Den senare kategorin innehåller många tillämpade kurser, där datorn ofta på ett naturligt sätt används som ett beräkningsverktyg, samt didaktiska kurser inom lärarutbildningen.



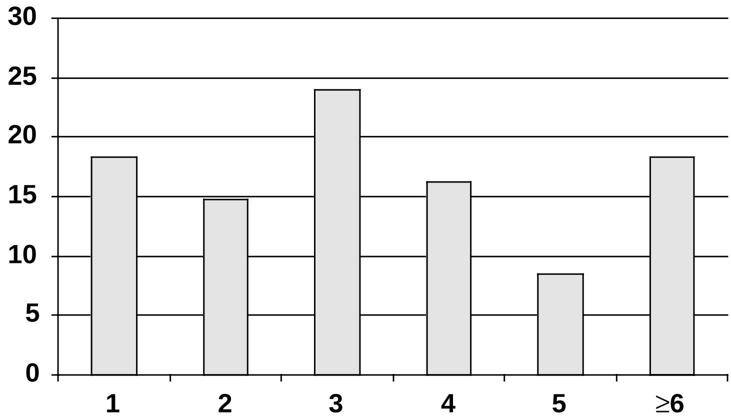
Tabell 4 – Datorstöd på olika kurser i matematik (% av kurser). A = Analys, Al = Algebra, L = Linjär algebra, T = Transformkurs, K = Komplex analys, B = Basår , Ö = Övriga

Datorstödet varierar däremot starkt mellan olika högskolor, vilket framgår av tabell 5. Även där är måttet andelen (%) kurser i matematik där datoranvändning är ett reguljärt inslag. Den höga stapeln för KTH förklaras av att institutionen har tagit ett beslut att datoranvändning ska förekomma på alla kurser i matematik. Det kan också observeras att trots uttalade satsningar på IT i Linköping och Lund har datoranvändning inte etablerats i någon större omfattning inom de traditionstyngda grundläggande matematikkurserna vid dessa universitet.



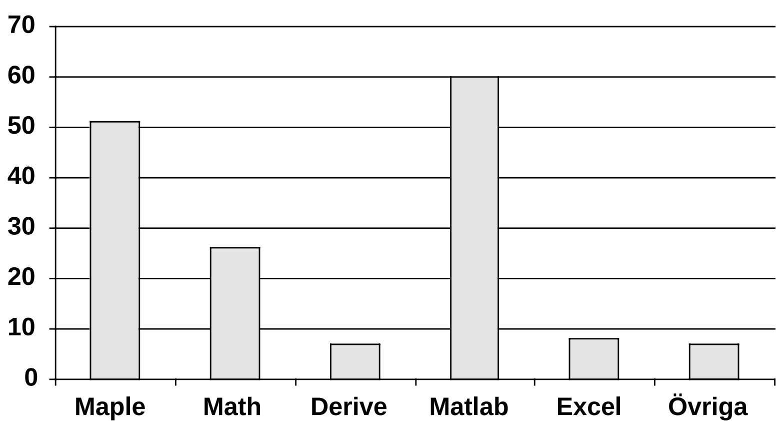
Tabell 5 – Datorstöd i matematik vid olika högskolor (% av kurser)

En intressant aspekt är också den tidsmässiga, dvs. hur många år datorstöd har använts på de olika kurserna. Tabell 6 visar på en stadig ökning av datoranvändningen, linjär snarare än exponentiell, och att nästan 60 % av de kurser som använder datorstöd har haft det i högst tre år. Knappt 10 % av matematikkurserna bland enkätsvaren har haft datorstöd i mer än fem år.

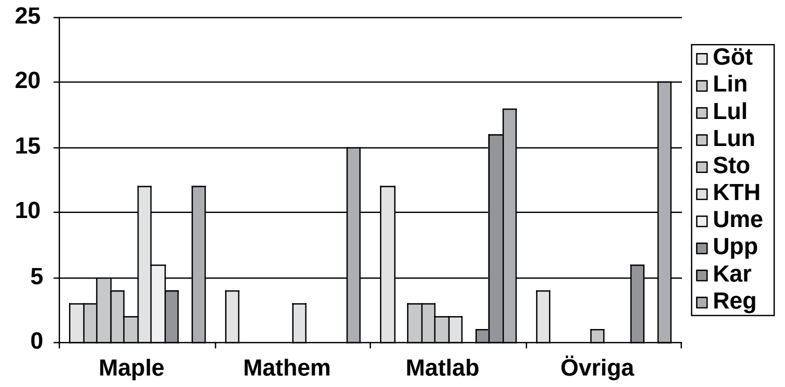


Tabell 6 – Procent av datorstödda kurser i matematik som haft datorstöd under 1 år, 2 år, osv.

De mest använda matematikprogrammen är Matlab och Maple, samt Mathematica (se tabell 7. I kategorin Övr i tabellen finns t.ex. Mathcad, Geometer's Sketchpad, Matematikverkstad, ordbehandlingsprogram och pedagogiska matematikprogram för skolan). Detta varierar emellertid starkt mellan högskolorna (tabell 8). Mathematica används t.ex. mer än Maple vid mindre högskolor och i Karlstad finns en lång tradition av att använda Matlab på matematikkurser.

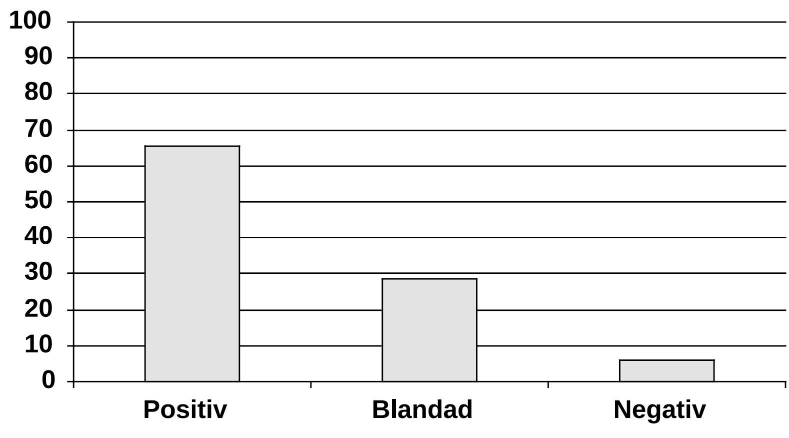


Tabell 7 – Använd programvara på datorstödda kurser i matematik (antal kurser)



Tabell 8 – Använda datorprogram i matematik vid olika högskolor (antal kurser)

Enligt lärarnas uppfattning är studenterna överlag positivt inställda till datoranvändning där den finns (tabell 9). Ofta beror negativ kritik från studenternas sida på initialt motstånd eller pga. tekniska problem med datorerna.



Tabell 9 – Studenters inställning till datorstöd (% av datorstödda kurser enligt lärare)

Följande former av datoranvändning i matematikundervisningen har angivits i enkäterna, här skrivna i den ordning som är vanligast förekommande:

- Laboratjoner
- Inlämningsuppgifter

- Projekt
- Hemsidor, som används bl.a. för distribution av uppgifter och labbar
- Demonstrationer (vid föreläsningar)
- Uppgifter kan lösas med hjälp av dator som finns tillgänglig i lektionssalen

Den klart dominerande formen av datoranvändning är laborationer, som ofta ska redovisas och ibland ger särskilda studiepoäng inom kursen. Detta innebär att datoranvändningen i allmänhet inte är integrerad i den övriga undervisningen, utan mer ett inslag med särskilt syfte.

Hur datorn används speglas i en del av de argument för datorstöd i matematikundervisningen som anges i enkäterna. Dessa argument kan sorteras i följande fem kategorier, där de tre första dominerar bland enkätsvaren:

Pedagogiska skäl

- För det ökar förståelsen för matematik
- För att underlätta förståelsen av vissa avsnitt
- Ge studenterna förståelse för formlernas betydelse
- Bättre/mer realistiska/mer komplexa exempel möjliga
- Som belysning av begrepp
- Möjlighet experimentera, få idéer till lösningar
- Att träna förmågan att experimentera för att skaffa sig förståelse
- Aktivera studenterna
- Ger bra möjlighet illustrera grafiska aspekter
- För att motivera och göra stoffet mer konkret
- För att beskåda den fysikaliska världen

Information

- För att ge information om möjligheter
- Dagens studenter bör få inblick i vilka matematikhjälpmedel som finns tillgängliga
- Visa att det finns matematikprogram

Pragmatiska skäl

- Datorn är ett användbart verktyg i matematik
- För att lösa mer komplexa problem
- Vissa uppgifter kräver datorer
- Ska man räkna på differentialekvationer, så kan man idag inte klara

sig utan datorer
- Handräkning ej möjlig i sammanhanget

Yrkeskunskap
- Del av ingenjörs vardag
- Ha nytta av sedan i vardagen/arbetslivet
- Bra om ingenjörer behärskar användandet av datoralgebra-program
- Datorer är vanliga i skolan och samhället och blivande lärare måste kunna se fördelarna och nackdelarna med detta hjälpmedel i undervisningen

Datorvana
- ...för att vänja dem (dvs. lärarstud) vid datoranvändning i deras egen undervisning
- Blivande lärare måste få datorvana
- Vänjer studenten vid ett modernt arbetssätt

Ofta anges fler argument tillsammans:
- Öka elevens kännedom om matematik-program, datorvana och förståelse
- Underlätta inlärning och förståelse; öka motivationen, ge intressanta tillämpningar; träna matematisk modellering; ”aktivera” studenterna, träna dem att ”kommunicera” matematik

Argument mot användning av datorer i matematikundervisningen gällde *resursbrist* (dvs. tid och pengar), att *utbytet är för dåligt*, att datorer används i *andra kurser*, att lämpliga *program* och *former* för datoranvändningen *saknas*, att det kräver *matematiska grundkunskaper* och att studenterna *saknar datorvana*, att det helt enkelt *inte behövs* något datorstöd, eller att kursens *tradition* utestänger en sådan förändring som datoranvändning innebär. Exempel på formuleringar i enkätsvaren under några av dessa kategorier är följande:

Resursbrist
- Bristande resurser
- Personalbrist
- Våra datorplatser räcker inte till
- Ekonomiska resurser saknas, lärartid och datorutrustade salar är för få
- Resursfråga i grundkurser som alla läser

- Grafräknare och sparbeting
- Utrymmet inom kursen saknas
- Tar tid från individuell handledning
- Tiden (dvs. lärarens) är otillräcklig

Utbytet för dåligt

- Användningen gav visserligen studenterna mer förståelse, men betydligt mindre förståelse än de kunde uppnå genom andra övningar/insatser på samma tid
- Bortsett från praktiska problem så tyckte studenterna att det var bortkastad tid. De ansåg att de hade mycket större utbyte av att sitta och räkna själva. (CAS, dvs. datoralgebrasystem i analys)
- Har liten eller ingen effekt när det gäller att förstå hur saker hänger ihop
- Kräver för stora lärarinsatser i förhållande till vad eleverna får ut av det
- Enbart figurritning tillför kursen ganska lite

Lämpliga program och former saknas

- Lämpliga hjälpmedel som är bra finns inte
- Har inte kunnat hitta vettiga former som bidrar till matematikförståelsen
- Känner inte till lämplig programvara
- Har inte hittat lämpligt material ännu

Behövs ej

- Träning i bevisteknik och förståelse av bevis huvudsak
- Kursen introducerar nya begrepp som inte förklaras bättre genom att använda dator
- Ser inget skäl
- Ingen lärare har sett någon fördel med datorer på denna kurs

Tradition

- Av tradition
- Vet ej. Traditionsbundet kanske?
- Att det inte blev någon laboration på det avsnittet beror kanske mest på att man aldrig haft det förut och att jag inte tänkte på att införa det.

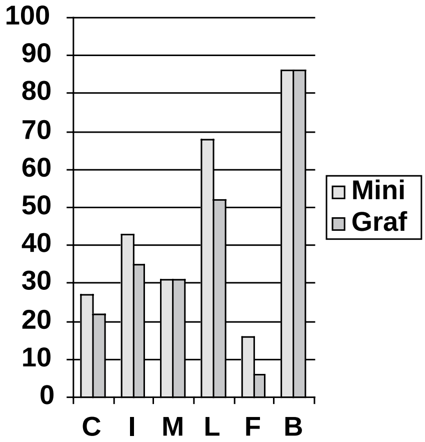
Ytterligare ett par citat får illustrera uppfattningar som finns bland högskolans matematiklärare:

- Jag anser att datorer/IT i undervisningen ska användas med omdöme. I de fall där de ökar förståelsen är de utmärkta hjälpmedel men emellanåt verkar det nästan som om det utbrutit någon form av modepanik – datorer ska in på alla möjliga och omöjliga ställen med följd att eleverna knäar under mängder av omfattande datorlaborationer där större delen av tiden går till att avläsa programkod.
- Jag har aldrig använt och kommer troligen aldrig att använda datorer eller ens räknare i min undervisning. Mina studenter är enligt utvärderingarna översvallande entusiastiska över mina datorfria kurser, både vad gäller innehåll och utformning.

Miniräknare

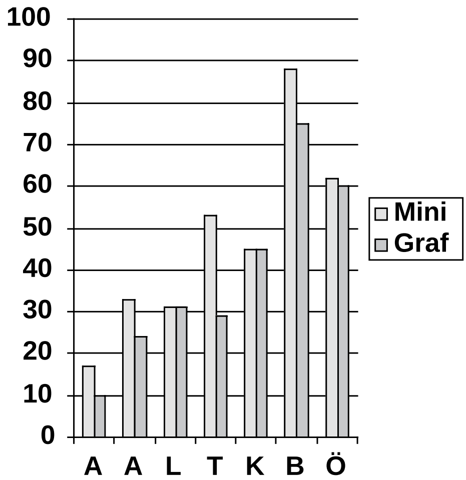
I såväl grundskolan som gymnasieskolan används miniräknare på i stort sett alla lektioner och skrivningar. På gymnasiets matematiktyngre program har också de flesta elever idag grafritande miniräknare, och läroböckerna innehåller instruktioner och uppgifter för dessa verktyg. Detta är bl.a. en följd av de nu gällande kursplanetexterna för skolan. Många studenter upplever det då som både obegripligt och som en extra svårighet när det plötsligt inte längre är tillåtet att använda dessa hjälpmedel på tentor i de grundläggande matematikkurserna på högskolan, vilket är fallet på många högskolor. För att få en bild av hur vanligt det är att miniräknare inte får användas på tentamen i matematik ingick några frågor kring denna problematik i den enkätundersökning som redovisas här.

Tabell 2 visade att miniräknare får användas på tentamen på drygt en tredjedel av kurserna i matematik, grafritande miniräknare i något mindre utsträckning. Av tabell 10 framgår att teoretiskt inriktade utbildningar ”förbjuder” miniräknare i stor utsträckning, medan användningen är utbredd inom de mer skolnära lärarutbildningarna och basåret.



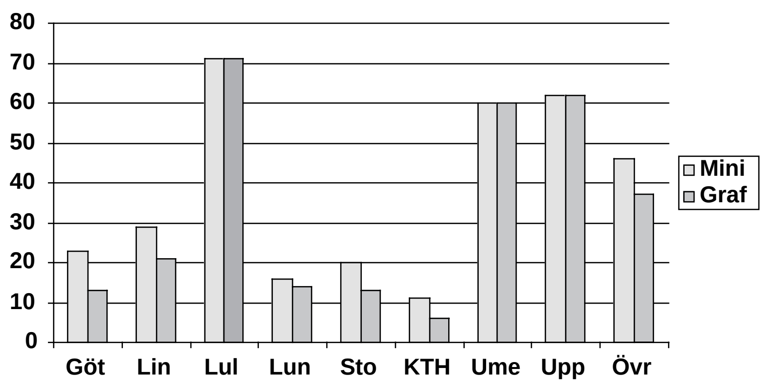
Tabell 10 – Användning av miniräknare respektive grafritande miniräknare på tentamen i matematik inom olika utbildningar (% av kurser). C=Civilingenjör, I=Ingenjör, M=Mat.nat., L=Lärar, F=Fristående kurs, B=Basår

Det är huvudsakligen i de inledande ”stora” matematikkurserna inom högskolan, dvs. analys, algebra och linjär algebra, som miniräknaren inte får användas på tentamen (tabell 11). Det kan noteras att den grafritande miniräknaren är minst använd på de kurser där den borde vara som mest användbar, dvs. analyskurser.



Tabell 11 – Användning av miniräknare respektive grafritande miniräknare på tentamen i matematik på olika kurser (% av kurser). A = Analys, Al = Algebra, L = Linjär algebra, T = Transformkurs, K = Komplex analys, B = Basår, Ö = Övriga

Variationen är stor mellan högskolorna när det gäller miniräknarens ställning (Tabell 12).



Tabell 12 – Användning av miniräknare respektive grafritande miniräknare på tentamen i matematik på olika högskolor (% av kurser)

De skäl som anges för att inte tillåta användningen av miniräknare eller grafritande miniräknare på tentamen i matematik kan sorteras i sju kategorier:

- Pedagogiska skäl
- Rättviseskäl
- Säkerhetsskäl
- Institutionsbeslut
- Epistemologiska skäl
- Pragmatiska skäl
- Tradition

De tre första skälen dominerar bland enkätsvaren. De skäl som angetts ligga bakom ett institutionsbeslut att inte tillåta miniräknaren är rättvise- och säkerhetsskäl. Följande exempel från formuleringar i enkätsvaren visar de vanligast förekommande argumenten:

- Risk för elektroniska fusklappar
- Våra tentamensuppgifter är sådana att man ej har nytta av miniräknare
- Vissa typer av uppgifter måste slopas
- Vill kontrollera algebraiska färdigheter
- Minskar möjligheten kontrollera förståelsen av grundläggande begrepp
- Tentamen kontrollerar förståelse
- Kursen teoretisk
- ”Äntligen begriper vi vad sin *x* är. Förut var det bara en knapp på dosan”
- En kurs ska träna det studenterna är svaga på
- Miniräknare kunde bara distrahera studeranden
- Är starkt tveksam till värdet av dessa hjälpmedel (grafiska)
- Att rita graf på räknare kräver ingen förståelse
- Man skall kunna själv
- Begreppsbildning och manipulationsförmåga i algebra tränas inte med miniräknare
- Stud. ska lära sig genomföra elementära aritmetiska kalkyler
- Stud. litar för mycket på miniräknaren, tränar inte upp sin kritiska förmåga
- Tentamen avser att testa elevernas kunskaper och färdigheter i matematik
- Tentamensämnet är matematik, inte apparatkunskap
- Ingen anledning tillåta

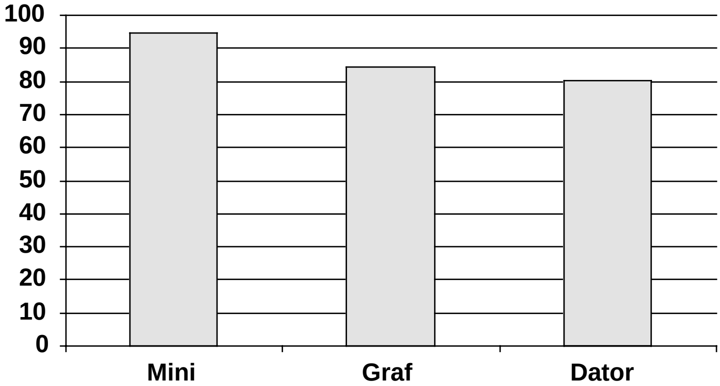
Ytterligare ett inlägg citeras här för att visa vad som ligger bakom termen *epistemologiska skäl*, och vilken dimension man kan tilldela (oreflekterad) användning av miniräknare vid matematiklärande.

- De senaste årens ”kunskapsras” tror åtminstone jag till stor del beror på felaktig och ogenomtänkt användning av räknedosor. Många fina matematikuppgifter bygger på att man gör en listig förenkling. Med dosa behöver man ofta inte detta – dosan klarar den oförenklade uppgiften innan jag hunnit komma på sagda förenkling. Då har man löst uppgiften, men har man lärt sig något?

Matematisk statistik

Ämnet matematisk statistik har på många kurser andra krav på beräkningstekniska hjälpmedel än ämnet matematik, varför problematiken med datoranvändning i undervisningen delvis har en annan karaktär. Dessutom har ämnet en betydligt kortare historia som akademisk disciplin än det ”rena” matematikämnet, vilket medför att undervisningen inte är ”belastad” med samma etablerade traditioner, även om kurser i matematisk statistik gavs inom matematikämnet innan det fick status av ett eget ämne. På grundkurser i matematisk statistik började inte datorer användas i någon nämnvärd omfattning förrän i slutet av 1970-talet. Att detta inte skedde tidigare berodde troligen mer på datortillgängligheten än av att det saknades behov.

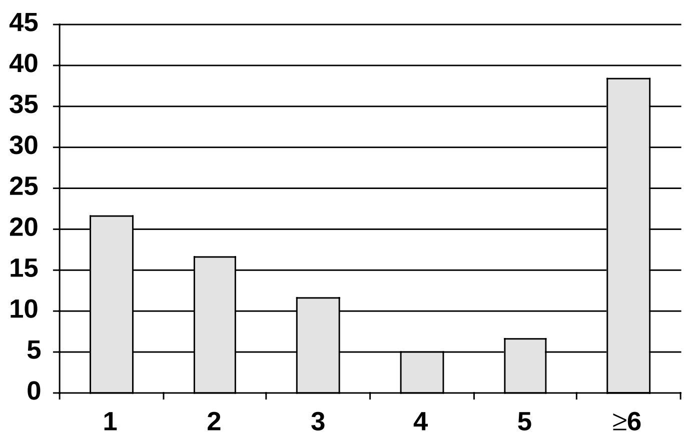
Eftersom det är betydligt färre enkätsvar (81 st) till kurserna i matematisk statistik än i matematik är det inte meningsfullt att dela upp resultaten i underkategorier på samma sätt som gjordes ovan för ämnet matematik. Att situationen ser annorlunda ut för matematisk statistik jämfört med matematik framgår av tabell 13, som kan jämföras med tabell 2 för matematik.



Tabell 13 – Användning av miniräknare, grafritande miniräknare respektive datorstöd på kurser i matematisk statistik (% av kurser)

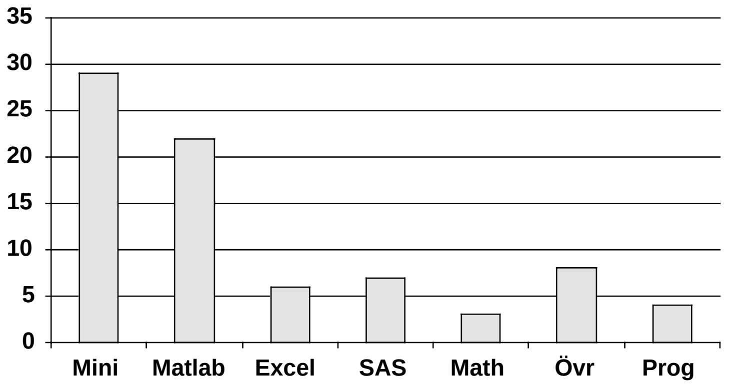
Av tabellen framgår att datoranvändning förekommer på de flesta kurser i matematisk statistik och att miniräknare får användas på tentamen utom på ett fåtal kurser. Det handlar i dessa fall om kurser i sannolikhetslära och andra teoretiskt inriktade kurser.

Tabell 14 illustrerar vad som nämndes i inledningen till detta avsnitt, nämligen att datorstödet i grundutbildningskurser i matematisk statistik har en längre tradition än i matematik. Ändå har antalet nya kurser med datorstöd ökat varje år de senaste fyra åren.



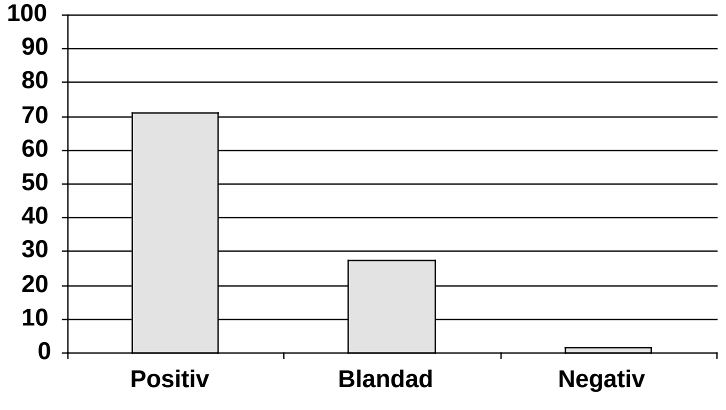
Tabell 14 – Procent av datorstödda kurser i matematisk statistik som haft datorstöd under 1 år, 2 år, osv.

När det gäller den programvara som används i undervisningen i matematisk statistik är det två program som dominerar (tabell 15). Se vidare uppsatserna av Holtsberg och Ohlsson i denna volym för en diskussion av för- och nackdelar med olika program i undervisningen.



Tabell 15 – Använd programvara på datorstödda kurser i matematisk statistik (antal kurser). Mini=Minitab, Math=Mathematica, Övr=Övriga (t.ex. JMP, Statgraph, Statview), Prog=Programmering

Studenternas inställning till datorstödet i datorstödda kurser i matematisk statistik skiljer sig inte mycket från hur det ser ut i fallet matematik (tabell 16; jfr tabell 9).



Tabell 16 – Studenters inställning till datorstöd (% av datorstödda kurser i matematisk statistik enligt lärare)

De argument för datoranvändning i kurser i matematisk statistik som anges är huvudsakligen av fyra typer:

- Förståelse
- Nödvändigt i en modern kurs i matematisk statistik
- Ökad studentaktivitet
- För framtida yrkesverksamhet

Den första kategorin handlar om att datorstödet kan ge ökad insikt i ämnet, bl.a. genom möjligheten till simuleringar. Samma kategori, förståelse, anges också som ett av fyra huvudargument mot dator användning:

- Förståelse
- Tidsbrist
- Teoretisk kurs
- Dåliga kunskaper i programmering

Istället för att bidra till ökad förståelse kan datoranvändning göra det möjligt att ta sig igenom en kurs utan förståelse. I vissa teoretiska kurser i sannolikhetslära uppges att datoranvändning ”skulle vara krystat”.

Diskussion och sammanfattning

En enkätundersökning av denna typ har som syfte att ge en bild av det faktiska läget. Det innebär att det blir en osäkerhet om hur generaliserbara de erhållna resultaten är till bortfallet, dvs. till de kurser för vilka det inte kom något svar på enkäten. Bortfallet på ca 55 % av de kursansvariga eller motsvarande som fick enkäten är inte jämnt fördelat mellan högskolorna, vilket kan förstärka de erhållna skillnaderna mellan högskolor och möjligen även mellan kurser. Nu är emellertid inte syftet med undersökningen att ”peka ut” högskolor eller kurser med låg eller hög datoranvändning, utan att få en översiktlig bild av situationen i landet som helhet. Bortfallet är inte så stort att det kan ifrågasätta resultatet att omfattningen av datoranvändningen generellt sett är ganska stor och ökande, men till sina former av ganska begränsad variation. Argumenten för och emot datorstöd och mot användningen av miniräknare på tentamen varierar men är mycket samstämmiga i ett fåtal kategorier.

I undersökningar av den här typen kan det också finnas en tendens att personer som inte är så intresserade av datorstöd (och som inte använder det) inte svarar på enkäten. Detta skulle kunna medföra att resultatet visar på en något högre datoranvändning än den faktiska, särskilt för de högskolor som har låg svarsfrekvens på enkäten. Bortfallsproblemen bedöms emellertid inte som stora och kommer att analyseras utförligare i den fullständiga rapporten.

Med reservation för resultatet av den analysen kan resultatet sammanfattas i följande slutsatser:

- Ökad datoranvändning de senaste tre åren (till ca 50 % av kurserna i matematik, ca 80 % i matematisk statistik)
- Stor skillnad mellan olika högskolor
- Ingen större skillnad mellan utbildningar (en speciell situation gäller för lärarutbildnigar)
- Ingen större skillnad mellan kurser (utom ”tillämpade”)
- Stor skillnad mellan högskolor i miniräknarpolicy på skriftlig tentamen i matematik, där totalt ca 1/3 tillåter
- Grafritande miniräknare används minst på kurser där man har mest nytta av den (analyskurser)
- Symbolhanterande program och Matlab dominerar datoranvändningen i matematik, Minitab och Matlab i matematisk statistik
- Formerna för datoranvändning varierar i allmänhet inte så mycket
- Argumenten för datoranvändning i matematikundervisningen varierar men ryms huvudsakligen inom kategorierna pedagogiska skäl, information, pragmatiska skäl, yrkeskunskap och datorvana
- Argumenten mot datoranvändning i matematikundervisningen varierar men ryms huvudsakligen inom kategorierna resursbrist, utbytet för dåligt, lämpliga program och former saknas, behövs ej och tradition
- Argumenten mot miniräknare på skriftlig tentamen i matematik kan sorteras under rubrikerna pedagogiska skäl, rättviseskäl, säkerhetsskäl, institutionsbeslut, epistemologiska skäl, pragmatiska skäl och tradition, och ”motståndet” är starkt på flera håll
- Det finns ett uttalat intresse hos många lärare att utveckla datorstödet i matematikundervisningen

Avslutning

Många som inte använder datorstöd anger som skäl att dom inte hittat lämpliga uppgifter eller former för det. På flera håll finns också en generell skepsis inför värdet. Detta visar att en diskussion kring datorstöd i matematikundervisningen (som detta seminarium är ett exempel på) behövs.

Skälen för datorstöd när det används är oftast fler och utförligare beskrivna än skälen mot då det inte används. Skälen känns också mer intuitiva och praktiskt grundade än baserade på den didaktiska (vetenskapliga) kunskap kring datormediets roll för kunskapens karaktär och utveckling som finns och ökar (t.ex. om datorns roll som ”amplifier” respektive ”reorganiser”; se t.ex. Dörfler 1993). Det datorstöd som redovisas känns också i de flesta fall ganska ”traditionellt”. Många känner intresse och vilja att utveckla olika former av datorstöd men får motstånd på grund av bristande resurser (främst tid inom kurser).

Matematikämnet inom högskolan har också en lång och ”tung” tradition. Bland enkätsvaren finns t.ex. nästan ingen diskussion om behov av förändrat kursinnehåll (”modernisering”). Man har ofta en fast syn på vad matematikkunnande är och hur man kan nå dit. Det är viktigt att kvaliteten i kunskapen inte trängs ut av nya tekniska hjälpmedels intåg, vilka aktualiserar en diskussion kring målen med matematikundervisningen inom olika utbildningsprogram. Datorn är en ganska ny företeelse i den matematiska världen och dess roll i matematikundervisningen är fortfarande utsatt för mycket ”spekulationer”. Men precis som inom andra områden av undervisningsproblematiken är steget från ”möjligheter” till fungerande verksamhet långt ifrån direkt. Det beror säkert mer på lärarens kunnighet och kreativitet än på tekniken i sig om matematikundervisningen blir datorstödd eller datorstörd.

Referenser

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. Bishop et al (Eds), *International handbook of mathematics education*, 469–501. Dordrecht: Kluwer.

Bergsten, C. (1994). Symbolic computing and mathematics education. *LiTH-MAT-R-94-30*, Department of Mathematics, Linköping University.

Björk, L-E. & Brolin, H. (1993.) ADM-Project. An educational project using mathematical toolkits. In B. Jaworski (Ed), *Technology in Mathematics Teaching, TMT 93. Conference Procededings*. University of Birmingham.

Björk, L-E. & Brolin, H. (1995). Using new technology as a tool to increase student understanding of calculus. In T.Scott (Ed), *Proceedings of ICTMT 1995, International Conference of Technology in Mathematics Teaching*. Napier University.

Dahland, G. (1997). Datorstöd i matematikundervisningen. En studie av förutsättningar för förändring av en traditionsrik miljö. Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet.

Douglas, R. (Ed) (1996). *Toward a lean and lively calculus. Report of the conference/workshop to develop curriculum and teaching methods for calculus at the college level.* (*MAA Notes #6*) The Mathematical Association of America.

Dörfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 158–186. Berlin: Springer Verlag.

af Ekenstam, A. & Greger, K. (1982). Icke-algoritmiska basfärdigheter. *Rapport 73*. Lärarutbildningen vid universitetet i Linköping.

Heid, K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education, 106*(1), 5–61.

Hillel, J. (1991). Computer algebra systems as learning tools. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23* (*5*), 184–191.

Jedeskog, U. (1994). Datorn i undervisningen. Skolverkets rapport 50.

Jedeskog, U. (1996). *Lärare vid datorn*. Skapande Vetande. Linköpings universitet.

Kaput, J. (1992). Technology and mahematics education. In D. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 515–556. New York: Macmillan.

Mayes, R. (1997). Curent state of research into CAS in mathematics education. In J. Berry & J. Monaghan (Eds), *The state of computer algebra in mathematics education*. Chartwell-Bratt and Studentlitteratur.

Niss, M. (1998). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Tekster fra IMFUFA, Tekst nr 351*. Roskilde universitetscenter.

Noss. R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings. Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer.

Riis, U. (1987). Datalära på grundskolans högstadium – Utvärdering av en treårssatsning. *Tema T Arbetsnotat 36*. Tema Teknik och social förändring, Linköpings universitet.

Riis, U. (1991). Skolan och datorn. Huvudrapport och sammanfattning av utvärderingen av treårssatsningen 1988–91 på datateknikanvändningen i skolan. *Tema T Rapport 24*. Tema Teknik och social förändring, Linköpings universitet.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. In A. Bishop et al (Eds), *International handbook of mathematics education*, 435–468. Dordrecht: Kluwer.

Steen, L. (Ed) (1988). *Calculus for a new century: A pump, not a filter.* (*MAA Notes #8*) The Mathematical Association of America

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Waits, B. & Demana, F. (1993). The pocket computer revolution in the teaching and learning of school mathematics in the United States. In B. Jaworski (Ed), *Technology in Mathematics Teaching, TMT 93. Conference Proceedings*. University of Birmingham.

Bilaga

Enkät om användning av datorer i matematikundervisning

Uppgifter om datoranvändning på kurs i Matematik/Matematisk statistik ifylls av kursansvarig

1a. Kursens namn

1b. Fördjupningsnivå

1c. Högskolepoäng

1d. Ungefärligt antal studerande på kursen läsåret 1997/98

1a. 1b. 1c. 1d.

2a. Utbildning/Program/Fristående kurs

2b. Högskolepoäng

2a. 2b.

3. Examinationsform

3.

4. Undervisningsform (föreläsningar, lektioner, laborationer, PBL etc.)

4.

5a. Miniräknare (ej grafisk) tillåten på tentamen

5b. Grafisk miniräknare tillåten på tentamen

5a. 5b.

6a. Om svaret var NEJ på fråga 5a, ange kortfattat varför.

6b. Om svaret var NEJ på fråga 5b, ange kortfattat varför.

6a. 6b.

7. Datoranvändning ingår i kursen

7.

8. Om svaret var JA på fråga 7,
8a. sedan vilket läsår?
8b. vilket/vilka datorprogram används?
8c. beskriv hur och i vilken omfattning datorer används på kursen, samt om datoranvändning ingår i examinationen.
8d. beskriv kortfattat varför datorer används på kursen
8e. är studenterna positivt inställda till datoranvändningen på kursen? Kommentera gärna svaret.

8a.
8b.
8c.
8d.
8e.

9a. Om svaret var NEJ på fråga 7, ange kortfattat varför
9a. Om svaret var NEJ på fråga 7, har datorer använts på kursen tidigare? Om det är så, varför används inte datorer på kursen nu?

9a.
9b.

10. Deltar du i eller är med och planerar en satsning på pedagogisk användning av IT i den grundläggande undervisningen i matematik eller matematisk statistik på institutionen/högskolan? Beskriv i förekommande fall kortfattat denna satsning och syftet/målet med den. Om den finns beskriven på någon hemsida, ange gärna webbadressen.

10.

Denna enkät har fyllts i av
Namn:
Högskola:
Institution:
Telefon:
E-mail:

Ifylld enkät skickas (inom 10 dagar) direkt till Grundutbildningsrådet till

Univ lektor Christer Bergsten	E-mail: chber@mai.liu.se
Matematiska institutionen	
Linköpings universitet	Fax: 013-285760
58183 Linköping	Tel: 013-282984

Bridging different domains of mathematics through computer based dynamic modelling

Colette Laborde
Université Joseph Fourier, Grenoble

Abstract

To use mathematical theories and methods as tools for solving real complex problems is not an easy task for many undergraduate students, who encounter great difficulties in coordinating all the mathematical resources they have, and in moving from one setting (or model) to another one. They also often lack abilities to represent geometrically algebraic objects and operations. Some examples of interplay between models and of using geometrical models in various fields of advanced mathematics made possible by the use of computer environments with direct manipulation are presented. These examples are based on the assumptions that mathematical methods may be used outside the purely theoretical framework from which they originate, that there are multiple ways of mathematically modelling a situation, and that there is no complete congruence between different models, each model having its specific potentialities in terms of giving evidence of mathematical phenomena; this is why it is fruitful to move from one model to another one

Introduction

University students are often told that mathematical theories and methods they learn are tools for solving complex problems. But time constraints may prevent teachers from giving to students the opportunity of facing this kind of problems. The availability of software may deeply change the situation: thanks to their calculating and graphing power, they allow students to spend most of the time on the modelling and interpreting phases (Arganbright 1997, Bissel 1995, Matos 1995, van Wert 1997).

Modelling a domain of reality consists of selecting objects and relations and representing them mathematically with the intention to use some mathematical tools to process initial information and obtain new one which is interpreted then in the real initial situation. Modelling here is considered in a broad sense. A domain of reality may be constituted of real objects as well as of abstract objects. We consider that moving from one setting to another one in mathematics as a modelling process. Solving a complex problem in mathematics often requires a recourse to different parts of mathematics and the ability of moving from one part to another one, as said by Pozzi et al (1998): "We think of mathematisation as a complex set of relations (including mathematical relations) between resources, activities and settings as they are operationalised to achieve a particular goal at work."

Conceptual nature of undergraduate students' difficulties in mathematics

Undergraduate students encounter great difficulties in coordinating all mathematical resources they have and in moving from one setting to another one. One of their major difficulties certainly lies in the absence of flexibility between models as mentioned by several researchers. It is also very likely that they especially lack abilities to represent geometrically algebraic objects and operations.

As Robert (1998) thoroughly described, problems undergraduate students encounter in mathematics do not lie in a lack of knowledge but in the atomic nature of their knowledge. Students know a lot of isolated theorems and facts without being able to structure this myriad of elementary knowledge items. They are able to use quite well a specific notion only if they are asked in an explicit way to do it, but it is far more difficult for them to decide on their own the use of notions or theorems and furthermore to use several of them. Several researchers stressed this absence of flexibility (Dreyfus & Eisenberg 1996, Tall 1996, p 297). Robert (op cit, p 152) mentioned in particular that even graduate students in pre-service teacher education never question the coherence between calculus and geometry: for them, there are two definitions of π, a geometrical one and a definition by means of an integral, but they do not consider a possible relation between both definitions. Robert (op cit, p 144) contrasts expert practice in mathematics and novice practice: experts are able to move in and around the problem to be solved, they vary parameters, change data, hypotheses, they move from one setting into another one, they consider the problem from several points of view, they establish relations between different ways of expressions, they are able to combine several aspects of the problem. But she concludes this description by saying that only a small number of attempts is made in the reality of education at university level to foster the learning of such practice.

Sharing the point of view of Noss and Hoyles (1996, p 48), we consider that the abstraction process in learning mathematics is “more a process of connection than ascension”. The absence of congruence between settings mentioned above is the source of difficulty and subsequently of learning.

We would like to claim that the availability of dynamic geometry software deeply changes the situation in that they offer an environment in which it is possible to perform rapidly complex and precise constructions, to modify and change constructions very easily in case of error, to receive visual feedback especially when varying parameters of the situation. In a word, this kind of environment offers rich validation and exploration possibilities. By using them, students gain flexibility between geometry and algebra or calculus by enlarging their visual experience of algebraic and numerical properties. It has been several times claimed that thanks to new technologies the role of visualisation would become increasingly important in mathematics education (Dreyfus 1993). Borba et al (1996) reported a very interesting case study with Ron, a sixteen year old student working on transformations of functions in a computer based multi-representational environment. Ron had to investigate the effect of geometrical transformations of graphs of functions (quadratics) on their symbolic algebraic representations. This case study showed how “visual reasoning, seeing graphical transformations as movements on or of the plane is a potentially powerful form of cognition” (p 333).

The present paper aims at presenting some examples of visual reasoning in advanced mathematics for undergraduate students made possible by this new kind of computer environment with direct manipulation.

Moving from one model to another one

Two models based on different systems of signifiers differ in the phenomena they give evidence and in the kind of operations they allow. One can take advantage of this absence of congruence between two models in problem solving. When solving a problem, one can start by using a model and when it seems to be quite impossible or very hard to go further, moving to another model may bring some new insight or enable a different way of tackling the problem. Douady (1986) emphasised how the interplay between what she calls settings could be fruitful for the development of a solving process by students. We would like to claim here that models of geometrical nature may give some kind of visual evidence that numerical or algebraic models do not bring so immediately without any calculation.

Contrasting the features of algebraic and geometrical models

Let us contrast below the main specific features of algebraic numerical models and of graphical geometrical models. The former ones are based on symbolic registers (algebraic expressions) and computations which may result in quantitative results. This kind of model requires an analytic apprehension from the student. Geometrical or graphical models are based on a register of shapes and curves. They allow geometric operations and transformations. They require a visual apprehension of spatial features from the student. Both kinds of models thus offer complementary possibilities on which it is possible to play in problem solving. This dialectical interplay is certainly emphasised by the dynamical displaying facilities of dynamic and interactive geometry software.

An example: transformations on complex numbers

A traditional example of this interplay is given by the geometrical representation of transformations on complex numbers. The use of a dynamic geometry software allowing to vary the parameters of the transformation or the set of points on which the transformation operates, offers in addition a greater exploration possibility, as shown below by using the software program Cabri-géomètre in the case of the transformation
$T(z) = 1/2\ (z + 1/z)$.

In a rectangular system of axes, a complex number z is represented by a point M. Point M' representing 1/z is constructed as the image of M through the composition of the inversion of circle with centre O and radius 1 and reflection around axis x'Ox. (Fig 1 & 2).

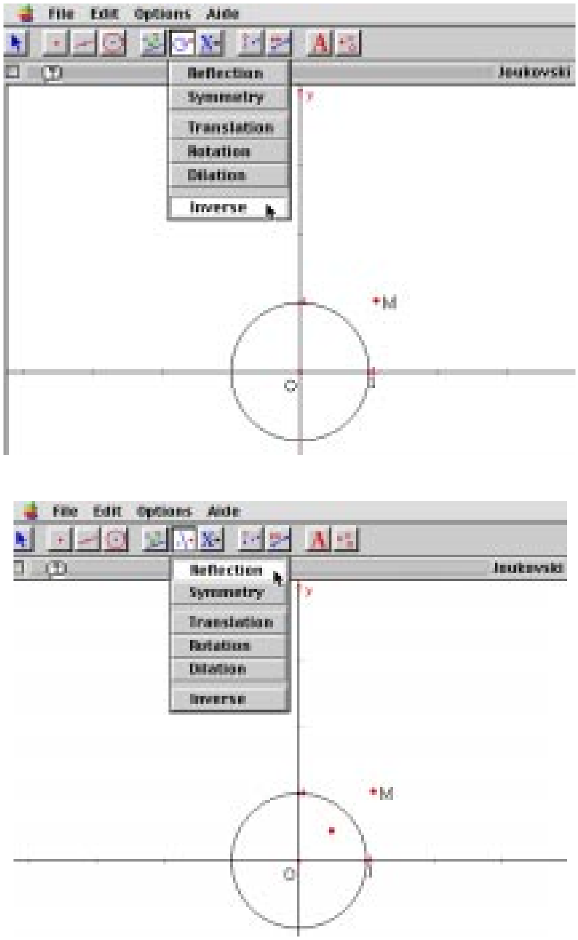


Figure 1

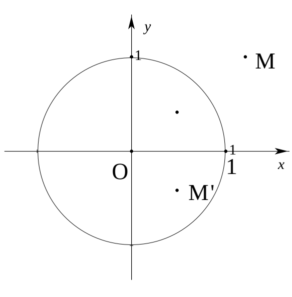


Figure 2

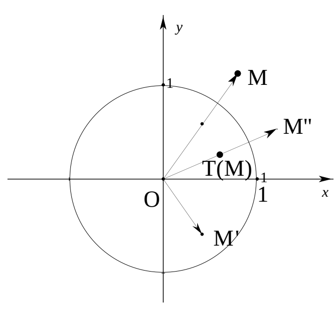


Figure 3

The point M” representing the number z + 1/z is obtained as the sum of vectors OM and OM’. And T(M) is finally obtained as the midpoint of segment OM” (Fig 3).

The drag mode and the trace facility of Cabri allow to observe the trajectory of T(M) when M is varying in the plane, in particular to find the invariant points of T (-1 and 1). It may be interesting to impose the trajectory of M to be a straight line (Fig 4) or a circle (Fig 5) (Bouteiller 1996).

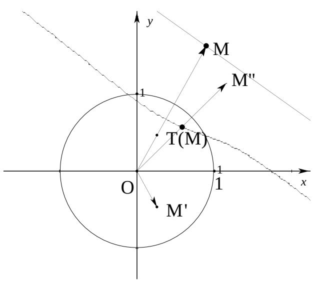


Figure 4

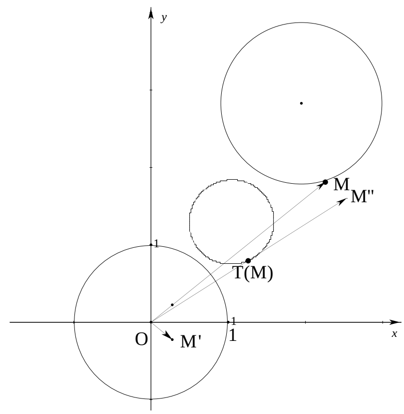


Figure 5

The trajectory of T(M) can be constructed as a locus of points when M is moving. Varying the line or the circle allows to observe the subsequent changes on the locus of T(M). If the straight line is passing through O, the locus of points T(M) seems to be an hyperbola. This can be visually checked with Cabri by creating the conic passing through 5 points of the locus: the conic which is recognised by Cabri as an hyperbola is always coinciding with the locus when the straight line passing through O is moved (Fig 6). The image of a circle has various shapes depending on this initial circle. It is possible to produce an aeroplane wing profile as done by Joukovski (Fig 7) with an initial circle passing through an invariant point.

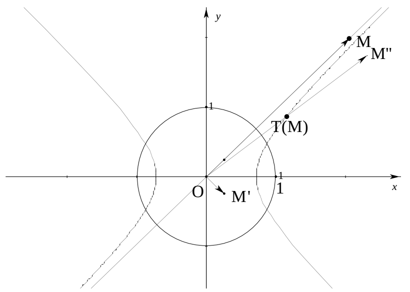


Figure 6

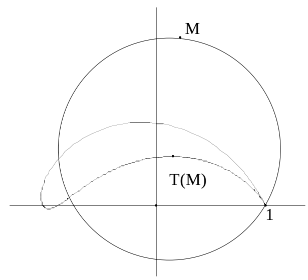


Figure 7

Observing the variation of the loci of T(M) according to the trajectory of M may raise some questions :

– Why is the image of a straight line passing through O an hyperbola?
– Why does the Joukovski curve have a singular point with two identical half tangent lines while the half tangent lines at the invariant point of the initial circle are opposed?

This can be explained by coming back to an algebraic model of complex numbers or using geometry. Modelling transformations on complex numbers using a dynamic geometry software allows to obtain very rapidly spatial answers to a first category of questions and to select interesting phenomena to be discussed mathematically. In particular it is possible to generate more precise questions by observing visual phenomena. A cycle questions-answers is initiated.

An example will be reported in the following section which illustrates this back and forth process between empirical observation in a computer environment and work at a theoretical level. It also shows how a geometrical model may give evidence of phenomena which would have remained invisible in the numerical model for a non expert.

A case study: discrete dynamic linear systems in pre-service teacher education.

This example was experimented twice (in years 1997 and 1998) in a course with pre-service teacher education students (fourth university year) having at their disposal a calculator TI 92. The course was aimed at broadening mathematical knowledge of students by giving them the opportunity of using mathematics as a tool for solving problems and of bridging various parts of mathematics. This is why students had at their disposal various tools and technologies. The calculator TI 92 gave them the opportunity to have available in the same device various tools, a CAS (a computer algebra system), a spreadsheet, a plotter, a programming language, a data matrix editor and a geometry environment (a Cabri version adapted to the TI 92). This enhanced the possibility for the students of moving from one model to another. It has to be noted that students were not very familiar with the TI 92. It was the second time they used it.

The problem

In a population two categories of individuals are distinguished: the "Youngs" and the "Olds". The state Pn of the population at moment n is represented by the couple (Y_n, O_n). The population is observed at a regular pace. The period of time between two observations is half of the average life length. At the end of such a period all Youngs become old, all Olds died. The law of evolution of the population is given by

$$Y_{n+1} = a Y_n + b O_n$$
$$O_{n+1} = c Y_n$$

Students are asked to simulate the beginning of the evolution of the population for the following values of a, b and c.

a = 0,5, b= 0,4, c = 0, 9
a = 0,8, b= 0,5, c = 0,6
a = 0,8, b= 0,5, c = 0,4

Then they are asked to predict the asymptotic behaviour of the population and to justify their prediction.

Observation of the work of the students

The work of the students in the 1998 session is described below. It can be divided into several successive phases.

Phase 1: calculation of some first states of the population

Students used the given values of a, b and c. They chose values for Y_0 and O_0. It is interesting to note that they wanted to use realistic values like 1000 or 10000. They often decided for $Y_0 = O_0$.

Some students performed the calculations quasi by hand, i e by only using TI 92 as an ordinary simple calculator and wanted to plot the corresponding points Pn in a coordinate system with the intention to discover a regularity in the sequence of points. This turned out to be long.

Some other students more familiar with programming recognised that Y_n and O_n are two iterative sequences and programmed them. They could get different values for different initial choices of the population. They could easily and rapidly guess the destiny of populations according to the different values of (a, b, c) : extinction, stability, explosion.

But at this stage a question was raised by several students: to what extent does the evolution of the population depend on the initial conditions ? It is interesting to note that students generally thought that the absolute values of Y_0 and of O_0 did not matter but that the proportion Y_0/O_0 could affect the evolution of the population.

Some students (but very few) decided to use a specific functionality of the TI 92: the sequence environment. They tabulated the ten or twenty first values of the double sequence. They asked for the manual of the calculator and found the way to manage it. This led them to the same type of conclusion as the former students.

Phase 2: elicitation of the linear application of R^2 onto R^2

The emergence of question of the influence of the initial state led students to stop calculating and to consider the application transforming (Y_n , O_n) into ($Y_{n+1,}$ O_{n+1}). Some of them recognised a linear application (denoted here by T) and that the problem is to find the behaviour of T^n for the big values of n. It took a while for them to formulate that a good method for finding T is to look for its eigenvalues.

The "real" context of the problem prevented the students to recognise a classical mathematical task they learned to perform during the previous years.

Phase 3: using the data matrix editor of the TI 92

When the linear application was recognised and its matrix identified, some students asked whether the TI 92 enables to calculate directly any power of a matrix. After the teacher introduced them to the data matrix editor, they rapidly obtained T^{10} or T^{100} for the given values (a,b,c). They could conclude that the calculator gave experimental evidence of the extinction, explosion or stability independently of the initial state of the population.

Example: A case of extinction with a = 0,5 ; b = 0,4 ; c = 0,9

Matrix of T^{10}		Matrix of T^{100}		Matrix of T^{500}	
.24125	.107253	.000018	.000008	$9.1528 \cdot 10^{-24}$	$4.06791 \cdot 10^{-24}$
.24132	.107358	.000018	.000008	$9.1528 \cdot 10^{-24}$	$4.06791 \cdot 10^{-24}$

Example: A case of explosion with a = 0,8 ; b = 0,5; c = 0,6

Matrix of T^{10}		Matrix of T^{100}		Matrix of T^{500}	
1.68822	.782055	1484.45	688.372	$1.80557 \cdot 10^{16}$	$8.3728 \cdot 10^{15}$
.939438	.43564	826.46	383.055	$1.00474 \cdot 10^{16}$	$4.65918 \cdot 10^{15}$

In the previous phase a theoretical question emerged from experimenting in the computer environment. In this phase, the reverse phenomenon took place. From a theoretical progress in the solving process emerges the need for specific facilities of the computer environment.

Phase 4: a theoretical solution

It was the appropriate time to ask students to explain theoretically the possible behaviours of the population and to express algebraically conditions related to each of the possible behaviours. Students were able to calculate the eigenvalues λ_1 and λ_2 as solutions of the characteristic equation:

$$\lambda^2 - a\,\lambda - bc = 0$$

They called λ_1 the positive solution and λ_2 the negative one and noticed that $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. They were able to express the expression of state n of the population in function of state 0 in the system of eigenvectors:

$$Y'n = (\lambda_1)n\,Y'_0$$
$$O'n = (\lambda_2)n\,O'_0.$$

They could deduce that the behaviour of the population depends on the position of the eigenvalues with respect to 1. But they were unable to find the way to express from the equation an algebraic condition on a, b and c equivalent to $\lambda_1 > 1$. The teacher had to explain to them that the problem was equivalent to the problem of finding the sign of the polynomial $\lambda_2 – a\,\lambda – bc$ for $\lambda = 1$. Actually they did not recognise the classical problem of positioning a number with respect to the roots of a second degree equation because it was not exactly worded in this way. They could thus find out that $\lambda_1 > 1$ is equivalent to $a + bc > 1$.

A student was not convinced that if $\lambda_1 > 1$, the population would explode; he stated that the absolute value of λ_2 could also be smaller than

1 and then O'n could tend to 0 as n tends to infinity. This question was left open since no student was able to refute the statement or to prove the statement. It was not possible to vary continuously a, b and c in the data matrix editor in order to empirically analyse the behaviour of the power n of the matrix for big values of n. This gave a good motivation for the teacher to propose to design a geometrical model which allows a continuous variation of a, b and c with the geometry application of the TI 92.

Phase 5: construction of a geometrical model

The vector (Yn, On) defining state n of the population is represented as a vector with origin O and coordinates in the default system of the geometry environment. The linear transformation T is given by two vectors v1 and v2 with origin O which are the images through T of the unit vectors of the default system. The coordinates of vectors v1 and v2 are (a,c) and (b,0) which can be displayed. It is possible to drag the vertices of v1 and v2 and so to vary continuously a, b and c. (Fig 8 & 9).

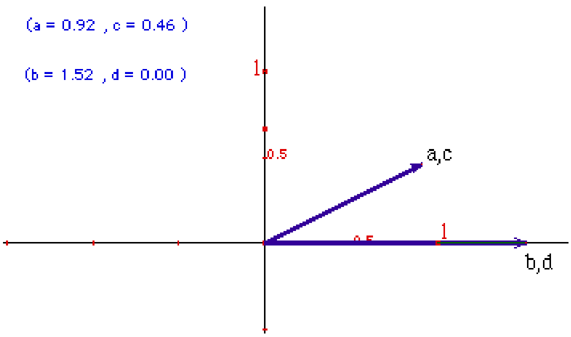


Figure 8

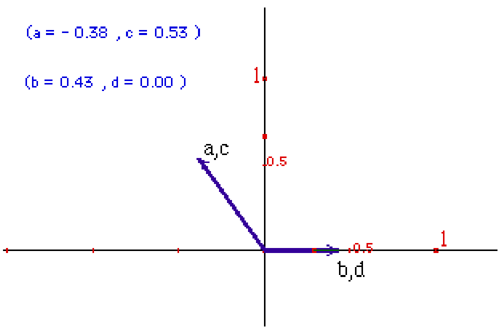


Figure 9

In a first step, students had to construct geometrically the image T(v) of any vector v with coordinates (x,y). It means that they had to translate the relation $T(v) = x \cdot v1 + y \cdot v2$, x and y being real numbers, into geometrical terms. This can be done using parallel lines preserving proportional lengths or by using the measurement transfer possibility of Cabri. This geometrical translation turned out not to be easy for them (Fig 10).

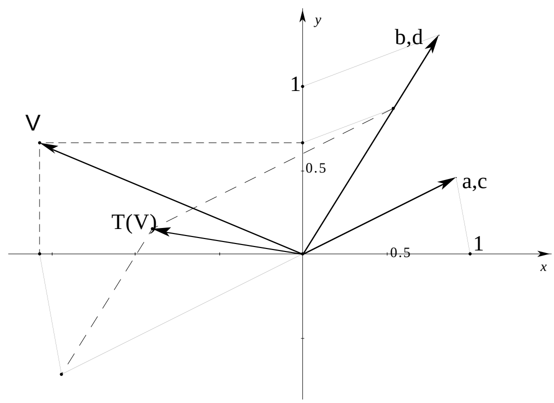


Figure 10

They saved the construction of T(v) from v as a macro-construction which appeared so in the menus as a tool called T.

When they managed to construct the image T(v) for any v, they were asked to find the eigenvectors of T by dragging v. Again it was not clear for several students how to recognise geometrically an eigenvector. They were not able to translate the condition $T(v) = k \cdot v$, k element of R, geometrically.

An episode on a conceptual difficulty attached to the notation $T^n(v)$

In a second step, they were asked to construct several iterated images $T^2(v)$, $T^3(v)$, $T^4(v)$, etc by using T. It has to be noted that some students were not able to obtain $T^2(v)$ because they operated T a second time on v and not on T(v). It is interesting to note that the geometrical operation revealed that they did not understand $T^2(v)$ as T operating on T(v) but that they were misled by the algebraic notation and understood T^2 as T operating twice on v.

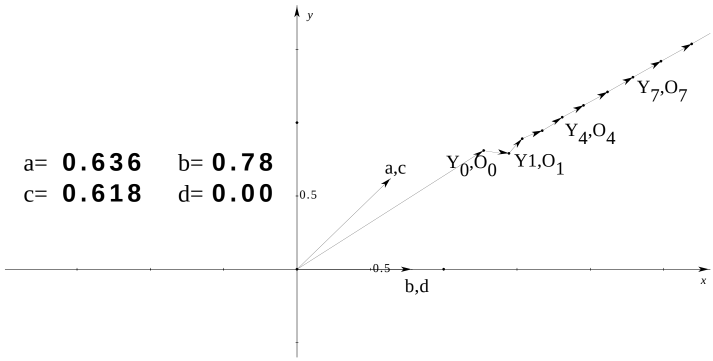
The calculator let them guess that something was wrong because it was for them as if it did nothing when applying T the second time on v; T(v) already existing, a second image T(v) was constructed by the environment coinciding with the first T(v). They called the teacher saying that the calculator did not work properly, it produced nothing. The teacher was able to show by pointing with the pointer that several objects were coinciding (ambiguity message "Which object?" displayed by the environment).

This episode is of interest for two reasons. Firstly, the calculator acted as a window on the conceptual difficulties of the students which could have remained invisible. Secondly, feedback given by the computer cannot always be interpreted by the user. Decoding feedback requires knowledge. In this case, it is because students explained to the teacher that they operated T twice on v that the teacher understood that they obtained superimposed images and could show them evidence of this. Students being sure that they should obtain another image $T^2(v)$ could not guess that the calculator constructed the same image. It is interesting also to note the inner contradiction of students. T applied a second time on the same v should produce something different. Students acted as if the calculator knew that it was a second time.

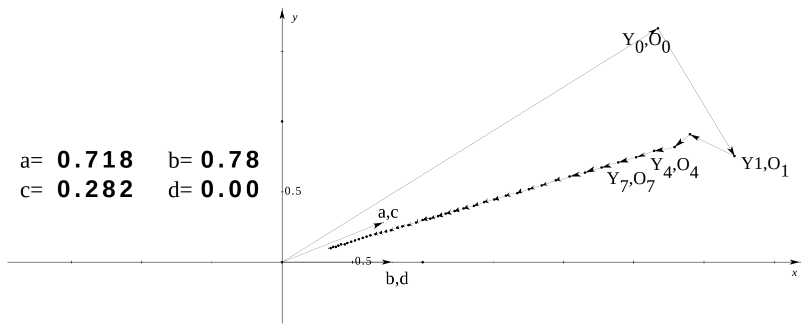
Phase 6: visualisation of the behaviours

Once several iterated images have been constructed, students could drag v1 and v2 and could confirm that they obtain explosion even with a continuous variation of a, b and c in case of $a + bc > 1$. What is more interesting is that they discovered two phenomena they did not anticipate.

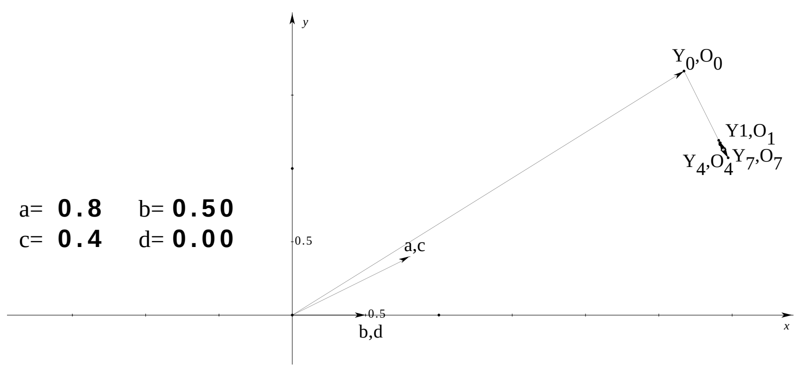
- The great sensitivity of the type of evolution to the variation of a, b and c.
- It seemed that very rapidly (for all n greater than a small number, $n>2$ or $n>3$) the iterated images are almost collinear, in both cases explosion or extinction (Fig 11). When $a + bc = 1$, the images also very rapidly converge to the same position, giving a strong evidence of the stability of the population (Fig 11).



Asymptotic collinearity in case of explosion



Asymptotic collinearity in case of extinction



Stability of the population

Figure 11

The collinearity seemed to stay even when varying v1 and v2, i e a, b and c. This raised a new question: why do all images $T^n(v)$ (for n greater than a small number) tend to be collinear ?

Phase 7: back to theory

This observation compelled to study algebraically the asymptotic behaviour of T^n (v). Students did it by determining a system of eigenvectors:

$$(\lambda_1, c) \text{ and } (\lambda_2, c)$$

They expressed (Yn, On) in function of (Y'_0, O'_0) by means of the eigenvalues λ1 and λ2 . (Y'_0, O'_0) denotes the initial state of the population in the system of eigenvectors. They obtained:

$$Y_n = \lambda_1 (\lambda_1)^n Y'_0 + \lambda_2 (\lambda_2)^n O'_0$$
$$O_n = c (\lambda_1)^n Y'_0 + c (\lambda_2)^n O'_0$$

By factorising $(\lambda_1)^n$ (which was not spontaneously done by students), one obtains

$$Y_n = (\lambda_1)^{n+1} (Y'_0 + (\lambda_2/\lambda_1)^{n+1} O'_0)$$
$$O_n = c (\lambda_1)^n (Y'_0 + (\lambda_2/\lambda_1)^n O'_0)$$

Since abs $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, when n tends to infinity $(\lambda_2/\lambda_1)^n$ tends to 0 for any value of λ_1 and λ_2. So when n tends to infinity, the direction of vector T^n (v) tends to be the direction (λ_1, c) which is the direction of the eigenvector attached to eigenvalue λ_1. Simultaneously the question which was left open was solved. If $\lambda_1 > 1$, Yn and On tend both to infinity for all λ_2 .

Phase 8: back to the numerical model

The teacher raised a new question resulting from this theoretical study. The linear asymptotic behaviour of the sequence T^n (v) was not directly visible on the numerical model. Is it possible to check it on numerical values of the matrix of T^n ? and how ? It took a while for the students to reply by proposing to check the proportionality of the rows of matrix T^n for n not too small.

Discussion

The disposal of a powerful calculator with several environments allowed to tackle not only a complex problem with long calculations but also a general problem. This is certainly one of the strengths of the computing environments to allow an empirical study of a problem depending on parameters, since it allows a variation of the parameters. The use of computer environments motivates the search for theoretical solutions. In the development of the problem solving process, the recourse to theory occurred in two kinds of circumstances: either after empirical trials or experiments with the intention to justify observed phenomena or after questions stemming from the observations were raised. Theory provides the means for explaining why phenomena empirically observed through experimentation occur, or to overcome some doubt or open question coming from observation.

The recourse to several environments fostering the construction of different types of models was certainly a catalyst for this back and forth move between experimentation and theory. Numerical phenomena called to question the problem from a theoretical point of view. One question remained unsolved (case $\lambda_1 > 1$, explosion and/or extinction?). Because of the absence of possible continuous variation of parameters in a numerical model, a geometrical model might appear as useful. It turned out that this model revealed new visual phenomena calling again for a theoretical explanation.

Environments provided by a calculator like the TI 92 offer complementary aspects: numerical models gave an idea of the size and of the speed of the evolution of the population for big values of n but could not easily give account for properties like collinearity. Geometrical models on the other hand do not easily provide T^n (v) for big values of n but allow a continuous variation of parameters, and offer global visualisation of phenomena that the discrete variation in numerical models did not. The sensitivity of the evolution to a small change in the value of the parameters close to the equilibrium situation where $a + bc = 1$ is easily visible on the geometrical model. It can be checked in a second step on the numerical model in order to get a numerical estimation of the rate of change but a variation of 10^{-2} of the value of a would not have been tried immediately on the numerical model. Implicitly it was assumed that the implied change of the state of the population would be also very small.

The move between several models was not easy for students. Difficulties emerged. The episode of T^n showed that expressing an algebraic operation in another medium may require an understanding that was not constructed by the students (even of fourth university year). Students used the algebraic notation without having to decompose T^n (v) as T acting on T^{n-1} (v). The software required to decompose T^n in a sequence of successive applications of T (that students did) and to consider successively each image as the argument of the next application of T (what they did not do). In a way the semiotic mediation required by the computer offered opportunity for learning about composition of functions.

The move between various settings may be a source of construction of meaning. Hillel and Sierpinska followed by several authors (quoted by Dorier 1998, p 209) mentioned the crucial role of flexibility in the case of the learning of linear algebra: flexibility between modes of reasoning and languages including geometrical representations. The joint choice of the population problem and of the multiple software calculator offered good conditions for fostering the use of both modes synthetic-geometrical and analytic-arithmetical, whose combination is essential in linear algebra as claimed by Sierpinska et al.

In the whole session the role of the teacher was critical. He had to prompt students to construct a geometrical model, and generally he played an important role in organising the move between various models or settings (for example for prompting phases 5 and 8). This move is not at all spontaneous for students, and one outcome of the session is certainly that students had to look at the same properties from different points of view and with different means of expression: two recurrent sequences and linear transformation of a vector space, linear combination of vectors and geometrical projection, points on a line and proportionality of lines of a matrix.

The teacher also gave some technical indications on how to use some applications of the TI 92, to help interpret feedback given by the environment. Using computer environments requires two types of knowledge: a technical knowledge but also a good amount of mathematical knowledge when using the environment and interpreting feedback. We consider that a joint learning (of the instrument and of mathematics) may take place if both experimentation in the environment and interpretation of phenomena offered by the environment are possible for students either on their own or thanks to teacher interventions. We could say, using a Vygotskian metaphor, that the combination of the task and the environment must belong to a zone of proximal experimentation and interpretation for the student.

Let us also stress the role of the interface. Its behaviour must be close to the expectations of the user (and thus does not require heavy learning) and must not produce difficulties external to mathematics.

Contribution of a geometrical modelling to solving differential equations

It has often been stated that for undergraduate students solving differential equations consists more in performing an algorithmic process made of algebraic calculations than searching for a family of functions satisfying to given conditions. Expert practice is not reduced to this algorithmic behaviour; it is far more the result of a combination of qualitative and deductive study. It involves a graphical study of the sign of the derivative and the identification of the locus of points satisfying y'=0 leading to subdivide the plane into regions where it is possible to predict the behaviour of solutions and to use classical theorems of existence. Once again the cognitive complexity of this interplay between the graphical geometrical setting and the algebraic setting was often stressed.

Artigue (1989) reported on an experimental teaching to undergraduate students in which thanks to a specific software program these latter could obtain the graphical representations of a family of solutions to a differential equation. She concluded that students learned easily to interpret these representations and that such a geometrical approach easy to develop allowed students to better predict the qualitative behaviour of solutions. The possibility of direct manipulation and of drag mode (not usually available at that time) nowadays highly improve this geometrical qualitative approach by making it more dynamic.

A qualitative study of differential equations

It is very easy (in Cabri-géomètre for example) to produce at any point P of the plane in a system of axes a tangent vector. The drag mode allows to visualise the variation of this vector when P is moved in the plane (Fig 12).

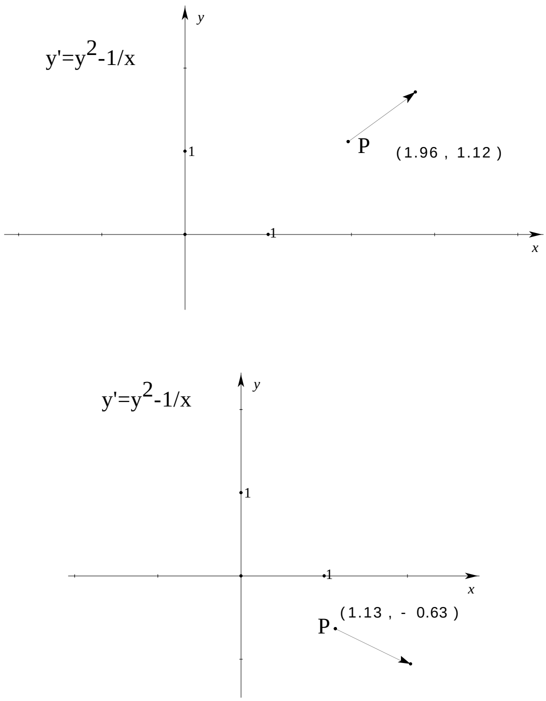


Figure 12

This facility can be used both in a static way and in a dynamic way. The Trace facility of the software allows the user to have an image of the field of vectors in all the plane or in a part of the plane (Fig 13). The density of displayed points of this field may be regulated according to the speed of the move of P.

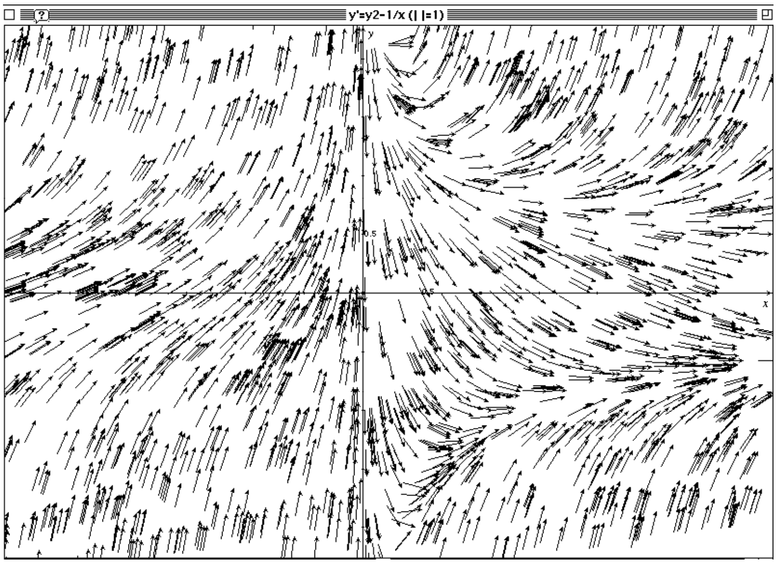


Figure 13 - An image of the tangent vectors field. It is possible to see the discontinuity at x=0.

This provides a first image of the behaviour of the derivative which can be given to be interpreted by the students . They can be asked to visually identify the locus of points P where y'=0. Using the tool Trace, they can try to drag point P in keeping horizontal the tangent vector (Fig 14). The manipulation is not very easy and requires permanent adjustment; by performing this manipulation, it is possible to feel that if the y coordinate of P is not increasing quickly enough when its x coordinate is less than 1, the tangent vector has a negative slope. The user can really experience a feeling of the necessity of a higher speed for the y coordinate when x<1 than when x>1.

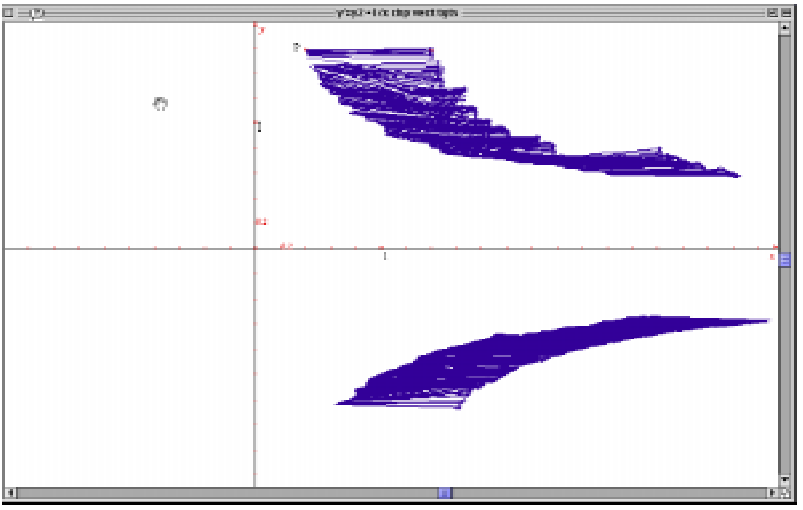


Figure 14

This compels the necessity to have a more precise idea of the set of points P where y'=0 and leads back to the algebraic setting to find an equation of this locus and then to construct it in Cabri, using the calculate and the locus facility (if it is possible to express y as a function of x or x as a function of y). It is then possible to check more precisely, using the drag mode, that the tangent vectors at points of this locus are horizontal (Fig 15). The redefine function of Cabri allows to constrain the point P to belong to the locus. Moving P on the locus or animating it (Tool animation) then allows a dynamic checking of the slope of the tangent vectors at points of the locus.

What is probably much newer in comparison with software producing a static representation of the field of tangent vectors by means a programming language is the possibility to produce by hand a qualitative sketch of an orbit by dragging P permanently in the direction of its tangent vector; the tool Trace being activated, the tangent vector at point P leaves a trace of its trajectory on the screen (Fig 16).

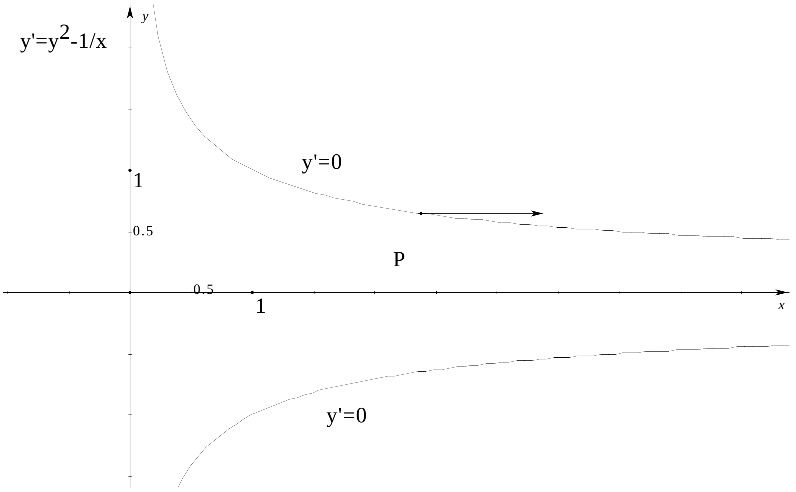


Fig.15

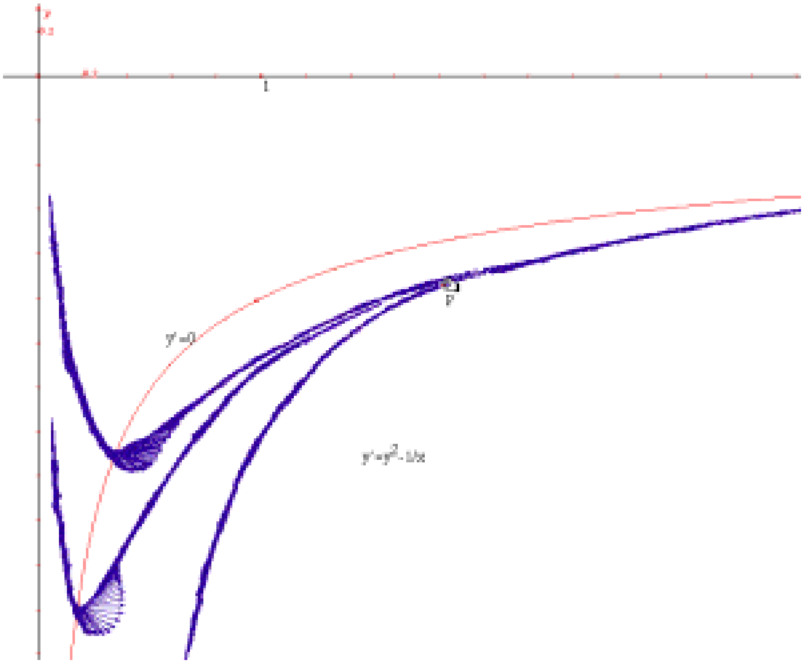


Figure 16 - Some orbits of the equation $y' = y^2 - 1/x$. The variation of the tangent vector is very fast when the orbit crosses the curve $y' = 0$. It seems that the orbits cannot cross this curve with a positive derivative.

This activity requires coordinating a visual and a psychomotor control. If the movement of the point P does not respect the tangent direction, the trace of the tangent vectors becomes thick. The gesture has to permanently take this visual feedback into account and correct by changing the direction of the move of P. Students construct through this visual motor regulation a kinaesthetic image of an orbit. They can bodily feel the constraints imposed by the differential equation. We make the hypothesis that it may contribute to view a differential equation as a relation between the coordinates of a point and the tangent at this point and thus provide a means of control when they have to solve the equation in an algebraic way.

This construction of an orbit is just a drag mode version of the Eulers' method and can be used for introducing it. Eulers' method offers again a possible linkage between the dynamic geometrical point of view and the numerical one.

Geometrical construction of Eulers' approximations of solutions of equation y' = 1/x

A system of axes and a point M0 with coordinates (x_0,y_0) are given. An approximation of the graphical solution of the equation passing through M0 can be constructed by Eulers' method as a polygonal line made of small segments depending of an increase h of x. The increase h is represented as the length of a segment and can be continuously decreased or enlarged by dragging the endpoint of the segment (Fig 17). The vertices of the polygonal line approximating the solution can be constructed as points with coordinates thanks to the iteration process starting from x_0 and y_0.

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + h\,(1/x_n)$$

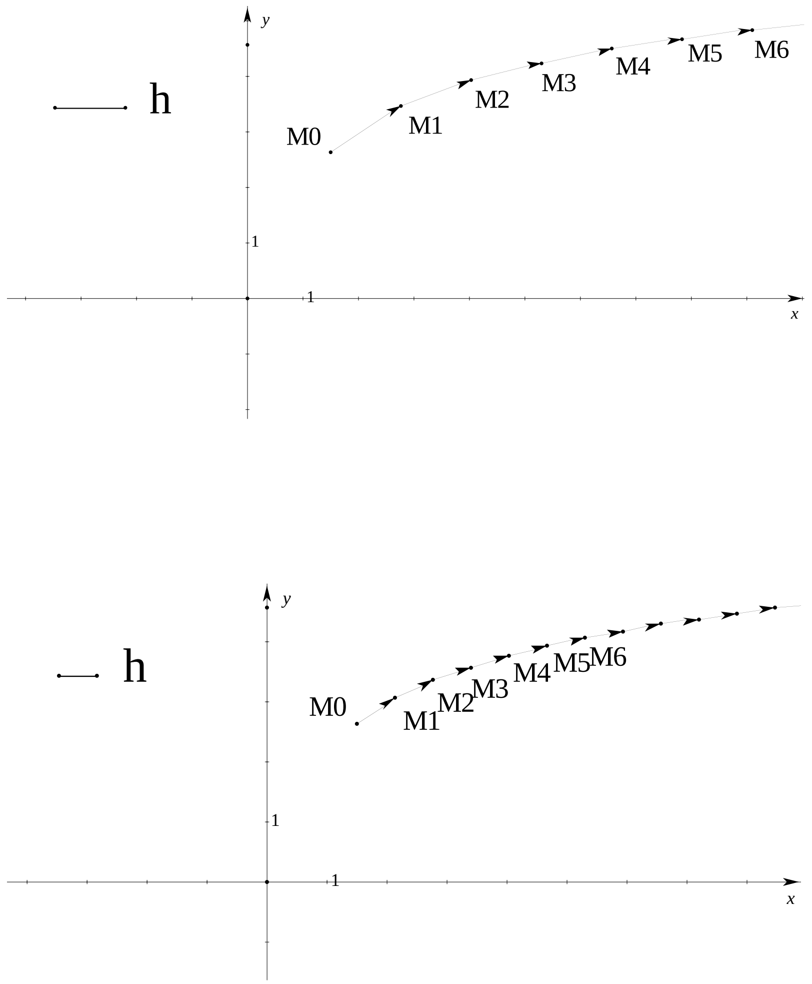


Figure 17

The construction of M_{n+1} from M_n can be saved by Cabri as a macro-construction avoiding the repetition of the construction for each point M_n. A macro-construction giving a greater number of successive points can even be designed.

Several solutions depending on the initial point and on h can be obtained rapidly (Fig 18). This first phase, which can be done by hand (but in a more tedious and long way), may contribute to give a meaning to the fact that the solution of a differential equation depends on initial conditions.

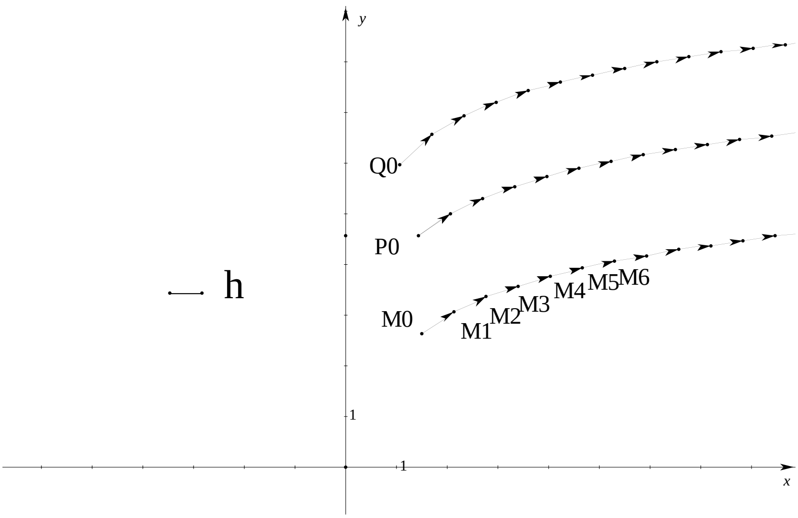


Figure 18

But the computer environment allows more. It allows the comparison with the graphical representation of the theoretical solution $y = \ln (x/ x_0) + y_0$ (with x / x_0 positive) which can be obtained in Cabri as the locus of points with coordinates x and $y = \ln (x/ x_0) + y_0$ (using the calculate tool of Cabri). Decreasing h shows that the approximating polygonal line fits better to the theoretical solution. Moving M_0 gives a visual evidence that the bigger is x_0, the better is the approximation by the polygonal line. Students can be asked to explain why (Fig 19).

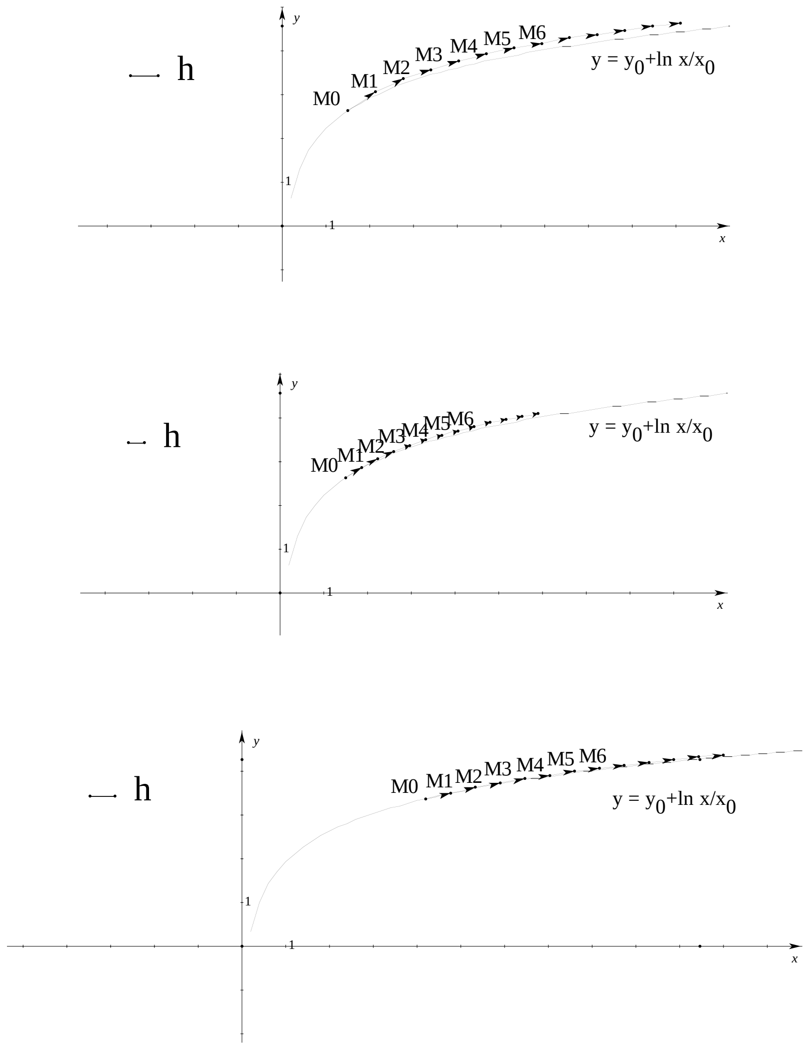


Figure 19

Artigue (1989) mentions that students usually believe that the Euler approximation is a polygonal line inscribed in the graphical representation of the same solution, and do not conceive it as made of segments joining points belonging to different solutions. It is easy to obtain a visual evidence of this in Cabri by producing the representation of each exact solution passing through a different vertex of a polygonal approximation (either by constructing it or by translating a solution defined by another initial point) (Fig 20).

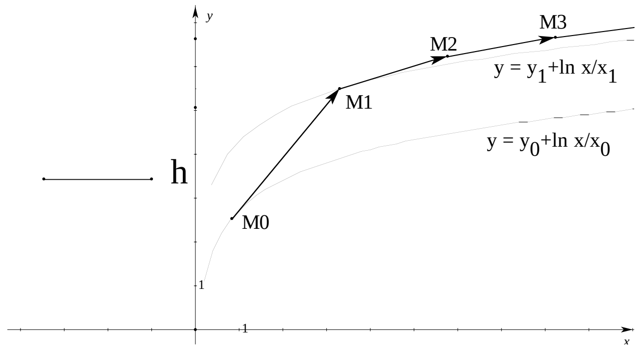


Figure 20

Dragging M0 so that x becomes negative produces a polygonal line with a strong change of slopes of the edges when passing from the negative values of x to the positive values of x. Again this phenomenon may be subject of questions to the students who are requested to interpret it (Fig 21).

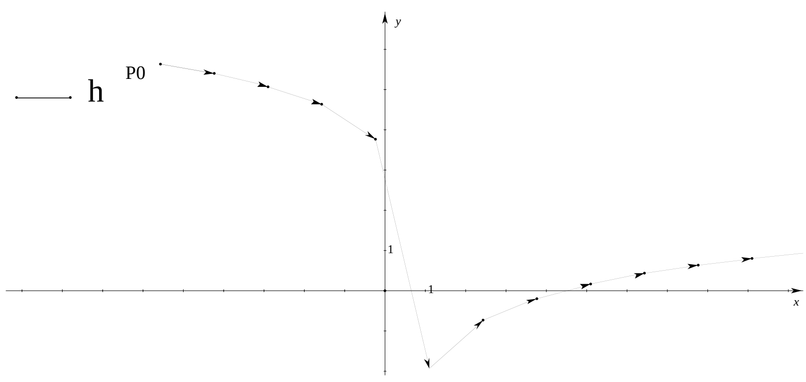


Figure 21

It also conflicts the view of the Euler approximation as an inscribed line in a unique solution and decreasing h does not suppress the discontinuity of slope. The environment can be used in two ways for refuting a misconception: by providing visual evidence or by creating an internal cognitive conflict between the conviction of students that the continuity of the derivative along a solution and the belief that the approximation is inscribed in one solution.

The dynamic geometry environment allows to give visual evidence not only for the numerical method but also of how the quality of the approximation depends on some variables like the x coordinate of the initial point.

The role of new technologies in the learning of cognitive flexibility

Potentialities of new technologies

From the examples reported above, it seems that new technologies offer good opportunities for fostering the learning of flexibility between various modes of thoughts, languages and modes of reasoning which seem to play a crucial role in advanced mathematics but which also seem to be absent from the students practice.

Pea (1985) claimed that cognitive tools are not only amplifiers but that they are also reorganisers of cognitive systems. Dörfler (1993) identified several ways in which the introduction of a tool may contribute to a reorganisation; among them he mentioned the reframing of constructs through changing the forms of representation employed and the system of operations admitted. We propose to extend this claim by stating that the coordinate use of different tools contributes to the construction of relations between independent knowledge items and may build a basis for structuring them into a coherent organisation.

We advocate for the important role of dynamic geometry software programs in this interplay for several reasons which are illustrated by examples given in this paper:

- Software offer a global visualisation of phenomena which enrich the mental imagery of students, some of these phenomena are more likely to be noticed by students than algebraic or numerical phenomena which require a more analytical apprehension. They may then raise the need for an explanation or a justification students can elaborate in calculus or algebra. In a word they provide imagery for algebra and calculus and they are a source of questions to algebra and calculus;
- Usually students are reluctant to use geometry at university level since for them very often geometry is identified to the taught geometry of secondary school without connections with other parts of mathematics; dynamic geometry environments through their powerful graphic and direct manipulation possibilities are tools which can be manipulated easily (they do not need the use of a specific

programming language and do not require a long introduction). The disposal of such environments facilitates the recourse to geometrical representations students would not do in a paper and pencil environment.

- They allow a continuous variation of parameters and contributes hence to the study of general problems and not only of specific situations. This feature seems to be very important for advanced mathematics: students must learn to cope with a general problem by playing with data and considering particular or limit cases but conversely they must also be able to consider a specific situation as a case of a more general one. The drag mode is a powerful instrument of reification of this generalisation process.

Didactic conditions

But even if there are now sophisticated environments on the market, just being faced with those environments does not necessary imply learning. Conditions have to be set up to allow a fruitful use and interaction between several environments. The choice of problems is critical. It must allow enough variations and generalisation, but also offer possibilities of rapidly experimenting with numerical data and obtaining some results to be interpreted. These problems do not need to call for new mathematical knowledge but they are chosen more for the opportunity they offer of linkages between different parts of mathematics. Their wording should be rather concise and open (no closed question) to allow different approaches. It means that the teacher should probably play an important role for the progress of the solving process.

Students should be able to start doing something when faced with the problem. These problem situations calling for the use of various tools and the move between different settings require an active role of the teacher. Starting from the questions of the students and using the absence of congruence between settings, the teacher should motivate the change of representation or expression and favour the interplay between settings, he must ask questions prompting a deep interpretation of observed phenomena and generalisation. It is clear that these teaching/learning situations are complex from two points of view: mathematically complex and complex at the level of the class management. But it is important that artificial complexity should not be introduced. The appearance of technologies with a friendly interface is a good factor of decreasing uninteresting complexity. It is not always easy to distinguish between mathematical difficulties and interface manipulation problems because they may be very intertwined in the type of environments embodying knowledge.

This is why we need to know more about difficulties of students in this type of situations by empirical studies for collecting data and analysing the type of complexity they are faced with. Our wish would be to see such teaching learning situations developed in the world for gaining more experience in this domain.

References

Arganbright, D. (1997). Spreadsheets for mathematics in a developing nation. In D. Tinsley & D. Johnson (Eds), *Information and Communications Technologies in School Mathematics*, 255-264. London: Chapman & Hall.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingéniérie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 183-209. Grenoble: IMAG et Institut Fourier.

Bissel, C. (1995). Spreadsheets and the Language of applicable Mathematics. In L. Burton & B. Jaworski (Eds), *Technology in Mathematics Teaching*, 365-386. London: Chartwell-Bratt.

Borba, M. & Confrey, J. (1996). A Student's construction of Transformation of Functions in a Multiple Representational Environment. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 31 n°3, 235-268.

Bouteiller, Y. (1996) Imagerie réelle ou complexe avec Cabri-géomètre II. *Actes de l'université d'été Cabri-géomètre*, 209-214, Grenoble: IUFM de Grenoble, IREM et laboratoire Leibniz-IMAG.

Dörfler, W. (1993). Computers and views of the mind. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from Computers*: *Mathematics Education and Technology*, 159-186. Berlin: Springer Verlag.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7/2, 5-32.

Dorier, J.L. (1998). A propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques* , 18/2, 191-230.

Dreyfus, T. (1993). Didactic Design of computer based learning environments. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds), *Learning from Computers*: *Mathematics Education and Technology*, 101-130. Berlin: Springer Verlag.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1996). On different factes of mathematical thinking. In R. Sternberg & Ben-Zeev (Eds), *The nature of Mathematical Thinking*. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, J.P. (1995). The Spreadsheet as a Tool for Mathematical Modeling: A Case Study. In A. di Sessa, C. Hoyles & R. Noss (Eds), *Computers and Exploratory Learning*, 321-336. NATO ASI Series, Berlin: Springer Verlag.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings.* Dordrecht: Kluwer.

Pea, R. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganise mental functioning. *Educational Psychologist* 20(4), 167-182.

Pozzi, S., Noss, R. & Hoyles, C. (1998). Tools in Practice, Mathematics in Use. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 36 n°2, 105-122.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* , 18/2, 139-190.

Tall, D (1996). Funtion and Calculus. In A. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Van Wert, T. (1997). The impact of informatics on the teaching of mathematics. In D. Tinsley & D. Johnson (Eds), *Information and Communications Technologies in School Mathematics*, 7-17. London: Chapman & Hall.

Datoranvändning i matematik i lärarutbildningen

Kerstin Ekstig
Uppsala universitet

Sammanfattning

Vid föredraget redovisas erfarenheter av datoranvändning i matematikkurser för blivande lärare. Datoranvändning har integrerats i kurserna i syfte att öka studenternas förståelse av matematiska begrepp och förbättra deras förmåga att lösa matematiska problem. Därtill kommer att datorn möjliggör nya undervisningsmetoder. Ett undersökande arbetssätt kan tillämpas där studenterna ställer upp och testar olika hypoteser och därvid kan upptäcka generella matematiska samband.

Bakgrund

Inom lärarutbildningen vid vår institution har vi försökt att integrera datoranvändning i matematikutbildningen. Detta har varit lättast att genomföra i grundskollärarutbildningen. När vår institution för cirka tio år sedan fick ansvar för matematikutbildningen av grundskollärare ställdes vi inför uppgiften att skapa nya typer av kurser med delvis annat innehåll och annan uppläggning än de traditionella. En viktig målsättning vid utformningen av denna nya utbildning var att ta in datoranvändning på ett naturligt sätt i matematikkurserna.

För studenterna på gymnasielärarprogrammet är situationen annorlunda. De har inte egna kurser utan samläser hela det första året med naturvetarprogrammet. De matematikkurser de läser tar i regel inte upp datortillämpningar. Datorutbildning tillgodoses genom att de studerande läser någon programmeringskurs vid en datainstitution. Studenterna får sällan tillfälle att sätta sig in i hur datorprogram av olika slag kan användas för att lösa matematiska problem med nya metoder. Sådana färdigheter bedömer vi som en mycket viktig del av lärarutbildningen. Vi har därför lagt in moment av detta slag i kursen ”Problemlösning och matematisk begreppsbildning för gymnasieskolan", som är en kurs som studenterna läser efter de första 40 poängen i matematik och som är speciellt utformad för blivande gymnasielärares behov.

Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning

Innan jag går in på beskriva hur vi utformar datorinslagen i lärarutbildningen skulle jag vilja ge mina synpunkter på konferensens rubrik "Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning". En vanlig erfarenhet från försök att lägga in datoranvändning i matematikkurser är att en viss ofta liten del av studenterna är mycket positiva, medan det stora flertalet upplever datorinslagen mest som en extra belastning. "Förutom att lära oss kursen måste vi lägga ner en massa tid på att lära oss Maple" är en vanlig kommentar från studenter.

För att datoranvändning ska kännas som ett stöd och inte som ett störande och tidskrävande inslag i undervisningen anser jag att följande två villkor måste vara uppfyllda:

- Datoranvändningen ska utgöra en integrerad del av undervisningen. Datorövningarna ska skötas av den ordinarie lektionsledaren och innehållet ska ha stark anknytning till det som behandlas i kursen i övrigt. Datorövningarna ska vara en hjälp att öka studenternas förståelse genom att konkretisera matematiska begrepp och belysa matematiska samband.
- Datorprogrammen ska vara så enkla att lära sig använda att detta inte tar någon nämnvärd tid från undervisningen. Studenterna ska från första början kunna koncentrera sig på att använda datorn för att lösa matematiska problem.

Genomförande av datortillämpningar i lärarutbildning

De datorprogram jag har använt mest i undervisningen och som jag har mycket goda erfarenheter av är kalkylprogrammet Excel och det symbolhanterande programmet Derive.

Kalkylprogram används i skolans matematikundervisning och hör självklart hemma i lärarutbildningen. Med hjälp av kalkylprogram kan man arbeta med matematik på ett undersökande sätt, vilket utgör en viktig målsättning för skolmatematiken. Kalkylprogram kan också vara ett utmärkt hjälpmedel för att konkretisera matematiska begrepp på skolnivå. Begreppet variabel behöver inte vara ett abstrakt *x* eller *y* utan kan konkretiseras i kalkylprogrammet som innehållet i en cell som man ser framför sig på skärmen och som man kan variera handgripligt. Att bygga upp en formel blir också något handfast och konkret.

Kalkylprogram förknippas ofta med ekonomiska tillämpningar. I matematik kan kalkylprogram med fördel användas till diskreta modeller av många olika slag. I lärarutbildningen använder vi kalkylprogram vid arbete med talföljder, numeriska metoder och talteori. Här är exempel på uppgifter av undersökande karaktär:

- Inträdesbiljetten till en föreställning kostade 9 kr för barn och 16 kr för vuxna. En kväll fick man in 761 kr i biljettintäkter. Hur många vuxna och hur många barn besökte föreställningen? Utred alla möjligheter.
- Undersök lösbarheten av ekvationen $ax + by = c$ för olika heltalsvärden på koefficienterna a, b och c. Formulera generella villkor för att ekvationen ska ha heltalslösningar.

Med hjälp av ett kalkylprogram kan man enkelt experimentera med olika värden på koefficienterna

	A	B
1	a=	16
2	b=	9
3	c=	761
4	x	y
5	0	=(B$3-B$1*A5)/B$2
6	=A5+1	
7		

Genom att variera värdena på koefficienterna på ett systematiskt sätt kan studenterna komma fram till och formulera allmänna lösbarhetskriterier för diofantiska ekvationer. Därefter blir det naturligt att diskutera med studenterna hur slutsatserna skulle kunna bevisas.

När man arbetar med symbolhanterande program krävs att man utvecklar andra typer av uppgifter än de som finns i vanliga kursböcker. Många av de traditionella läroboksuppgifterna blir triviala när man arbetar med så kraftfulla verktyg. Det behövs mer omfattande och sammansatta uppgifter, där man för att lösa dem måste kombinera egna matematiska kunskaper från den aktuella kursen med logiska och matematiska resonemang och med beräkningar som utförs av datorn. Syftet med uppgifterna ska vara att belysa viktiga matematiska principer så att studenternas förståelse förbättras. Här följer ett exempel på en sådan typ av uppgift.

- Funktionen *f* är definierad genom $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x + 1}$

Bestäm konstanterna *a*, *b*, *c* och *d* så att kurvan $y = f(x)$ får stationära punkter i (1, -2) och (-2, -11). Undersök också de stationära punkternas karaktär.

Figurerna visar en lösning med hjälp av Derive:

#1 F(x):= $\dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x + 1}$

#2 FPRIM(x):= $\dfrac{ax^4 + 2a^3x^2 + x(3a + b - c) + 2x(b - d) + c - d}{(x^2 + x + 1)^2}$

#3 F(1) = -2

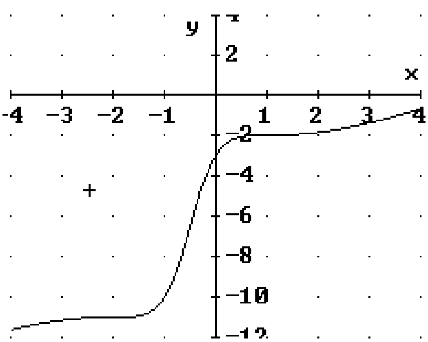
#4 F(-2) = -11

#5 FPRIM(1) = 0

#6 FPRIM(-2) = 0

#7 SOLVE([F(1) = -2, F(-2) = -11, FPRIM(1) = 0, FPRIM(-2) = 0],[a, b, c, d])

#8 [a = 1 b = -5 c = 1 d = -3]



Det matematiska kunnande som krävs av studenten är först att kunna utnyttja den givna informationen till att bilda ett ekvationssystem med 4 obekanta och 4 ekvationer. De matematiska manipulationer som krävs (derivera en kvot och lösa ekvationssystemet) kan datorn utföra. Att därefter få grafen uppritad är enkelt med datorhjälp.

När det sedan gäller att undersöka de stationära punkternas karaktär kan olika metoder komma upp till diskussion. Många studenter nöjer sig med att konstatera att det framgår av figuren att båda punkterna är terrasspunkter. Vissa studenter visar att andraderivatan är 0 i båda punkterna och drar av detta slutsatsen att det är terrasspunkter. Frågan om vad som krävs av en korrekt lösning ger här upphov till fruktbara matematiska diskussioner.

Erfarenheter

Många av studenterna på lärarprogrammen har svårt att tillgodogöra sig matematikundervisning som bedrivs på traditionellt sätt. De behöver en mer konkret framställning. Ett bra sätt att konkretisera matematiska begrepp är att använda dem i problemlösningssituationer.

Problemlösning är ett nyckelbegrepp i matematikundervisning på alla nivåer. Bland matematikdidaktiker gör man vid diskussion av matematikinlärning en distinktion mellan ”matematik *för* problemlösning” och ”matematik *genom* problemlösning” (se t.ex. Wyndhamn 1993). Det första uttrycket avser det traditionella sättet att först lära sig teorin och sedan tillämpa den vid problemlösning. Det andra uttrycket syftar på att man genom att arbeta med problemlösning kan närma sig den matematiska teorin och förstå den.

Ett viktigt skäl att låta studenterna använda dator vid arbete med problemlösning är att de då kan koncentrera sig på att förstå de matematiska begrepp uppgiften grundar sig på. I annat fall händer det ofta att studenter upplever att de beräkningar och andra rutinoperationer som är nödvändiga för att lösa uppgiften är så mödosamma, att de inte samtidigt orkar tänka igenom och förstå den matematiska idén bakom uppgiften. Detta anknyter till en tankegång som Kutzler (1996) kallar för *scaffolding*.

En annan positiv effekt av att låta studenterna använda dator vid problemlösning är att man då bättre kan tillvarata deras erfarenheter från gymnasiet där räknehjälpmedel används i hög utsträckning. I kursplanen i matematik för gymnasieskolan framhålls att tillgången till tekniska hjälpmedel delvis förändrar matematikens innehåll och metoder, samt att inriktning mot förståelse, analys av hela lösningsprocedurer, kritisk granskning av resultat och förmåga att dra slutsatser, är viktigare än isolerad färdighetsträning.

Flera fördelar med datoranvändning i matematikundervisning kan nämnas. Studenterna upplever det modernt och stimulerande. Deras problemlösningsförmåga utvecklas genom att de får arbeta kreativt och formulera egna lösningsstrategier. Om den lösningsmetod de kommer på leder till besvärliga beräkningar kan de ändå genomföra beräkningarna med hjälp av datorn. Studenterna klarar av att lösa nya problemtyper som de inte klarar med traditionella metoder.

En stor fördel med datoranvändning är att den ger möjlighet att arbeta med nya kreativa metoder i matematikundervisningen. Man kan tillämpa ett undersökande arbetssätt, där studenterna uppmuntras att experimentera och testa olika hypoteser. De kan då upptäcka mönster och generella samband. Ett sådant arbetssätt kan också inspirera studenter till att formulera och lösa egna matematiska problem.

Det finns naturligtvis också risker med alltför flitig datoranvändning. Om studenterna blir helt beroende av räknehjälpmedel och inte klarar ens de enklaste rutinuppgifterna för hand, är det risk att förståelsen blir lidande. Ett visst mått av manipulerande för hand är nödvändigt för att förstå de matematiska begreppen och metoderna. En viktig didaktisk uppgift är att hitta den lämpliga avvägningen mellan att arbeta med och utan räknehjälpmedel för att uppnå bästa möjliga förståelse.

Referenser

Kutzler, B. (1996). Improving Mathematics Teaching with Derive. Chartwell-Bratt.

Wyndhamn, J. (1993) Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice. *Linköping Studies in Art and Science • 98*. Department of Communication Studies, Linköping University.

Datorstöd i blivande matematiklärares utbildning

Mikael Holmquist & Thomas Lingefjärd
Göteborgs universitet

Sammanfattning

I en kurs där blivande matematiklärare använde olika datorprogram som stöd för att ta fram matematiska modeller för att lösa avancerade problem, reagerade flertalet av studenterna med entusiasm för arbetssättet och de nya formerna för examination. Vissa studenter hade dock invändningar mot att arbeta med öppna problem och mot att ta ansvar för sitt eget lärande. Det förändrade arbetssättet medförde också ett tydligt auktoritetsskifte från eget kunnande/lärare/läromedel till en stark tilltro till datorprogrammen och en stundtals okritisk analys av de modeller som genererades via datorteknik.

Inledning

För den som utbildar sig till grundskollärare respektive gymnasielärare formuleras följande målsättningar i den s.k. examensordningen. För att erhålla examen skall studenten ha:

> förmåga att använda datorer och andra informationstekniska hjälpmedel för egen inlärning och kunskap om hur dessa hjälpmedel kan användas i undervisningen av barn och ungdomar/elever. (Högskoleförordning)

I en undervisningssituation där man låter användandet av datorer påverka arbetssätt och arbetsformer har man anledning att samtidigt fundera över formerna för examination. Det är allmänt känt att sättet att examinera styr många universitetskurser i matematik.

> …where examination centers have limited access to experienced examiners and associated resources the task of preparing questions which reflect the intentions of curriculum is made more difficult… Such examination papers have a substantial proportions of questions devoted to recall of learned

> material directly from memory, rather than questions which assess the ability to *apply knowledge in new situations*, to *interpret information in context*, to *relate causes, consequences and reasons* or to develop a sequence of steps to *make a decision* or to *solve a problem*. One serious consequence is that only those skills assessed by the examination are taught and studied rather than the range of competencies required by the syllabus (Izard 1993, s. 187.)

Vi vill här framhäva den inbyggda dualismen inom lärarutbildningen. Samtidigt som de blivande lärarna fostras i sina ämnen, ska också studierna utgöra en väsentlig del av en yrkesutbildning. Denna utbildning skall ge studenterna förutsättningar att utöva ett yrke som bland annat styrs av nationella dokument. Informationsteknikens betydelse kommer till uttryck i såväl målbeskrivningar som i betygskriterier för grund- och gymnasieskolan:

> Skolan ska ill sin undervisning i matematik sträva efter att eleven kan med förtrogenhet och omdöme utnyttja miniräknarens och datorns möjligheter. (Utbildningsdepartementet 1994a, s. 33.)
>
> Eleven utför nödvändiga beräkningar, använder i relevanta sammanhang tekniska hjälpmedel och har viss förmåga att värdera resultaten. (Skolverket 1994, s. 49.)

Att lärarutbildningen är yrkesinriktad är något som också tydliggörs i Högskoleverkets rapport till regeringen 1997:

> För att erhålla grundskollärarexamen skall studenten ha de kunskaper och färdigheter som behövs för att som lärare förverkliga skolans mål och medverka i utvecklingen av skolan verksamhet.
>
> Det skulle kunna hävdas att detta är det enda mål som behövs och att alla andra mål som målen om ämneskunskaper, insikt i didaktik, förmåga att använda datorer mm, är olika medel för att nå detta övergripande mål. (Högskoleverket, 1997, s. 35.)

Utbildningens uppdragsgivare ger här uttryck för en förväntan på att användandet av datorer och avancerade miniräknare ska utgöra naturliga inslag i en lärarutbildning.

Det är vår avsikt att beskriva de erfarenheter vi har från en matematikkurs (5 p) inom utbildningen för grundskollärare 4–9 och gymnasielärare, en kurs där ovanstående förväntningar tilläts få ett genomslag i såväl innehåll och undervisning som i former för examination.

En förändrad matematikkurs

En tidigt uttalad och tydlig ambition i uppläggningen av kursen var att så snart som möjligt få studenterna att själva ta ansvar för sin inlärningssituation och att i denna ”övergång” från passivt lyssnande till aktivt kunskapssökande betrakta användandet av datorer och grafiska minräknare som ett centralt inslag. Arbetets utformning skulle med andra ord göra det möjligt för studenterna att ta eget ansvar (Skolverket, 1996). Vikten av att ta ansvar för sitt eget lärande har diskuterats bland annat av Ekholm (1997) och Povey (1995).

Vår avsikt med matematikinnehållet i kursen var att ge de studerande en inblick i hur man med hjälp av matematiska modeller, goda kunskaper i matematik (här avsåg vi att ta i anspråk det kursinnehåll studenterna tidigare stött på under utbildningen såsom Euklidisk geometri, linjär algebra, statistik och matematisk analys) och visst datorstöd kan lösa mer omfattande matematiska problem. Datorprogrammen som kom att användas var huvudsakligen *The Geometers Sketchpad, PC Logo*, *Excel*, *CurveExpert* och *WinStat*.

Tre olika ”examinationsunderlag” infördes: inlämningsuppgifter, litteraturseminarier och en s.k. hemtentamen, som sträckte sig över en vecka. De inlämningsuppgifter som formulerades fick här spela en dubbel roll, dels som arbetsmaterial i en inlärningssituation, dels som underlag för examinationen. Didaktiska teorier och modeller i samband med undervisning kom till uttryck i såväl litteraturseminarier som i den inlärningsprocess i vilken studenterna befann sig under kursens gång.

Studenterna bereddes tillträde till en datorsal med all ovan beskriven programvara installerad samt tillgång till Internet. Redovisning av resultat kom att bestå i såväl pappersdokument som dokument lagrade på diskett. E-post och fax möjliggjorde för långväga studenter att upprätthålla kommunikationen med kursledningen.

Vi valde att introducera de ovan nämnda programvarorna samt grafiska miniräknare med inriktning mot grundläggande syntax och kommandon. De studenter som ville ha möjlighet att utföra kurvanpassning på sin dator hemma, kunde hämta hem shareware programmen *CurveExpert* och *WinStat* via den webbsida som vi upprättat för den aktuella kursen. Denna webbsida innehåller också korta genomgångar av hantering av grafiska miniräknare och valda datorprogram. Ingen speciell genomgång av dessa program genomfördes, istället lades ansvaret för installation och handhavande på studenterna själva.

Nyvunna erfarenheter

Redovisningen av våra erfarenheter grundar sig på flera källor såsom frågeformulär som besvarats av studenterna, noteringar under pågående arbete, litteraturseminarier, studenternas rapporter och dokumenterade inlämningsuppgifter samt avslutande tentamen.

Arbetssätt och kursinnehåll exemplifieras med följande inlämningsuppgift

Låt $R(1) = 1$ och bilda för $k \geq 1$, $k \in N$, $R(k+1) = 1 + \dfrac{k}{R(k)}$

och undersök vad som händer med $R(k+1)$ när $k \to \infty$.

Argumentera för ditt påstående.

Hur skulle studenterna komma att sätta detta samman med vad de tidigare tagit del av inom matematisk analys?

I sina tidigare studier har de bl.a. stött på formella definitioner av gränsvärden såsom

Definition. Gränsvärde då $x \to \infty$.

Låt f vara en funktion, definierad i ett intervall $x \geq a$.

Vi säger att $f(x) \to A$ då $x \to \infty$ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett ω

sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x > \omega$.

Vi skriver också $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ och säger att $f(x)$ går mot eller konvergerar mot *A* då $x \to \infty$.

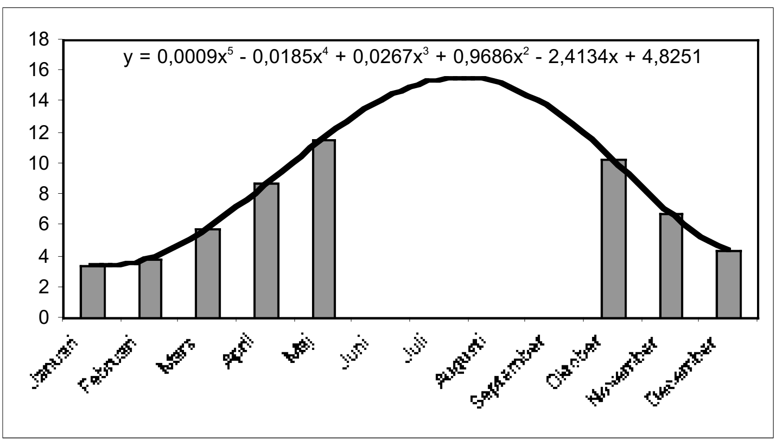
Från Hellström, Morander & Tengstrand (1991, s 132)

Trots detta visar många studenter en stor osäkerhet i vad som egentligen är ett gränsvärde och vad som inte är det. I sitt arbete med att försöka beskriva vad som egentligen kan sägas om *R(k):s* utveckling när k $k \to \infty$, uttryckte flera studenter en viss frustration över att Excel inte har fler celler och att man därför inte kom ”tillräckligt nära oändligheten”. Möjligheten att stänga in ovanstående uttryck mellan två kända funktioner eller att algebraiskt lösa problemet föreföll också att ligga utom räckhåll för de flesta studenterna – de föredrog att söka efter en formel eller räddande funktion i Excel.

Datorstödets roll vid matematisk modellering exemplifieras utifrån ett problem som hämtats från en av de hemtentamina som givits på kursen. Se appendix för problemformulering.

Den här typen av öppna problem ger studenterna oväntade svårigheter. Det stöd som datorprogrammen ger ifråga om anpassningar förefaller ibland t.o.m. störa studenternas egen förmåga till reflektion.

Medan så gott som alla klarar deluppgift a) och b) utan större problem, så har det stora flertalet problem med såväl deluppgift c) som d). Ett vanligt misstag rörande den årsvisa variationen var att ta månaderna kalendervis, dvs börja med januari, etc. Detta tillsammans med Excels verktyg ”Infoga trendlinje”, ledde flera studenter fram till följande bild.



Det är uppenbart att varje försök att försöka koppla denna modell till innehållet i uppgiften kommer att medföra problem. Vad betyder exempelvis det tomma gapet i mitten av figuren? Vad betyder arean under kurvan? Vilken betydelse har det anpassade 5:e-gradspolynomet?

Diskussion

Studentreaktionerna och utvärderingsresultaten visar på en stor variation i attityder och förhållningssätt. Det finns studenter som är odelat positiva till arbetssättet och arbetsformen, om än de anser att det har ställts stora krav: ”*den första kurs jag läst som påminner om hur man arbetar ute i förvärvslivet*…”. Det finns också studenter som är mycket negativa till att också behöva lära av andra studerande och själva ta ansvar för sitt lärande: ”*det är* *inte rätt att man skall behöva fråga kurskamrater...*" Många av studenterna var dessutom ovana vid att "skriva och kommunicera matematik" och ovana vid att bli bedömda utifrån andra bevekelsegrunder än om de givit rätt svar på en uppgift eller inte: "*jag vill inte bli bedömd utifrån hur jag skriver, bara hur jag räknar…*". Detta berör den viktiga frågan om hur man bygger upp betygsgrundande kriterier. Vi tar inte upp detaljer i detta men vill peka ut kravet på att en inlämnad lösning bygger på ett analytiskt resonemang samt det faktum att framtagning av kriterier kan ske i diskussion och samråd med studenterna.

Då studenterna uppmanades att arbeta tillsammans i par eller större grupper, men att med egna reflektioner och slutsatser redovisa sitt resultat enskilt fanns farhågor att vi därigenom skulle få inlämnat identiska lösningar. Dessa kunde snart fördrivas, då majoriteten av studenterna satte en individuell prägel på sina lösningar.

Själva uppgifterna blev också kritiserade för att inte vara tillräckligt "tydliga". Oftast fanns i denna kritik en önskan att få lösa problem som leder fram till ett "tal", dvs. problem som till svar har ett visst bestämt numeriskt värde. Det tog sig uttryck i att många studenter ansåg att flera av uppgifterna på tentamen var "otydliga", eller att de möjliggjorde alltför många olika strategier för studenterna. Detta kan tolkas som att man inte anser att datorverktygen kommer till sin rätt just vid lösandet av mer komplexa problem.

En annan observation som vi gjorde, var att studenterna efter ett par veckor blev okritiskt inställda till de resultat man tog fram med de datoriserade verktygen och grafiska miniräknarna. Detta tog sig exempelvis uttryck i att många studenter lät de grafiska miniräknarna eller *CurveExpert* generera lämpliga kurvanpassningar och därefter valde det föreslagna samband som hade starkast beräknad korrelation, dvs. högst värde på korrelationskoefficienten r. Ytterligare ett exempel var att en majoritet av studenterna gav uttryck för att ha ersatt deduktiva resonemang i Euklidisk geometri med animering i *The Geometer's Sketchpad*.

Vi anser utifrån vår erfarenhet att studenternas förhållningssätt till såväl innehåll som till inlärning och undervisning i matematik kommer tydligt till uttryck i en kurs med denna konstruktion, här särskilt med avseende på datorstöd i matematikundervisning. Detta utgör en väsentlig grund för de diskussioner kring olika inlärnings- och undervisningsperspektiv som bör föras i varje universitetskurs i matematik (eller annat ämne) för blivande lärare (Romberg, 1993). På så sätt förstärks medvetenheten om det egna förhållningssättet till ämnet och professionen hos varje student (och lärare).

Utnyttjandet av datorer ger nya möjligheter men ställer också nya krav på hur ett matematikinnehåll hanteras och bearbetas, ett område som är i behov av en närmare kartläggning.

> Our conclusion is that we are very early in the technological transformation and that we desperately need research in all aspects of teaching and learning with technology.
> (Balacheff & Kaput 1996, s. 469.)

Referenser

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Part 1. Dordrecht: Kluwer, s. 469–505.

Ekholm, M. (1997). Lärarna måste själva ta ansvar för sin yrkesutbildning. *Pedagogiska magasinet* årg 2, nr 1, s. 52–55.

Hellström, L., Morander, S., & Tengstrand, A. (1991). *Envariabelanalys*. Lund: Studentlitteratur.

Hyams, D. (1996). *CurveExpert – a curve fitting system for Windows*. Clemson, SC.

Högskoleförordning. SFS 1993:100.

Izard, J. (1993). Challenges to the improvement of assessment practice. In Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. (ICMI Study Series). Dordrecht: Kluwer.

Key Curriculum Press Inc. (1995). *The Geometer's Sketchpad*. Berkeley, CA, Key Curriculum Press Inc.

Kursplan till MAL400: http://www.matnat.gu.se/fakultet/namnd/kursplan/mal400.html

MAL400s hemsida: http://didserv.did.gu.se/matemati/mal400.htm

Microsoft Co. (1995). *Microsoft Excel*. Microsoft Corporation.

Povey, H. (1995) Working for change in teacher education. In Burton, L. & Jaworski, B. (Eds.), *Technology in mathematics teaching – a bridge between teaching and learning*. Chapter 7, p. 135–153. Lund: Chartwell-Bratt.

Parris, R. (1996). *WinStat*. Exeter, NH: Peanut Software.

Romberg, T. A. (1993). How one comes to know: Models and theories of learning of mathematics. In Niss, M. (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. (ICMI Study Series). Dordrecht: Kluwer.

Skolverket. (1994). *Naturvetenskapsprogrammet. Programmål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer.* Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (1996). *Bilden av skolan 1996.* (Rapport nr 100). Stockholm: Liber.

Utbildningsdepartementet (1986). *Matematik för alla – Ett diskussionsmaterial.* Stockholm: Liber.

Utbildningsdepartementet (1994a). *Kursplaner för grundskolan.* Stockholm, Fritzes.

Utbildningsdepartementet (1994b). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna. Lpo 94 – Lpf 94.* Stockholm, Fritzes.

Appendix

På allt fler platser används naturgas för uppvärmning av bostadshus. Nedan redovisas mätdata från ett projekt där man ville visa på hur gasförbrukningen kan minskas då husets ytterväggar förses med en viss tilläggsisolering.

a) Tabell 1 visar gasförbrukningen (m³) per vecka och medeltemperaturen (°C) utomhus för ett hus innan man utfört tilläggsisolering i ytterväggarna.

Temperatur (°C)	-1	0	2	4	5	7	10
Gas (m3)	206,6	195,6	173,2	149,4	115,7	116,0	82,4

Tag fram en modell som beskriver sambandet mellan utomhustemperatur och gasförbrukning.

b) Tabell 2 visar motsvarande data som finns i a) för samma hus efter det att man utfört tilläggsisolering.

Temperatur (°C)	-1	0	1	3	6	8	10
Gas (m3)	134,4	127,6	120,6	110,1	89,4	72,7	59,4

Tag fram en modell som beskriver sambandet mellan utomhustemperatur och gasförbrukning efter utförd tilläggsisolering.

c) Tabell 3 visar medeltemperaturen (°C) utomhus månad för månad från och med oktober till och med maj, på den plats där huset är beläget.

	O	N	D	J	F	M	A	M
°C	10,3	6,7	4,4	3,4	3,8	5,7	8,7	11,5

Tag fram en modell som beskriver medeltemperaturens variation under året.

d) Teckna ett uttryck för mängden gas som sparas under ett år om tilläggsisolering utförs och beräkna mängden sparad gas i det beskrivna exemplet.

Statistikprogram i undervisningen i Lund

Anders Holtsberg
Lunds universitet

Sammanfattning

Studenterna bör få komma i kontakt med professionella datorverktyg för statistisk modellering och analys. Det finns emellertid många olika statistikprogram och många kategorier av användare med olika behov. Några olika programtyper diskuteras och en del erfarenheter från undervisningen i Lund förmedlas.

Typer av datorprogram

Slutmålet för all undervisning i statistik är att studenten självständigt ska kunna analysera ett stort datamaterial, från den inledande undersökningen till att sätta upp en modell och svara på frågor om vilka slutsatser man kan dra. I ett sådant analysarbete är datorn ett självklart hjälpmedel och så har det varit sedan tillkomsten av datorer.

Användningen av datorverktyg i undervisningen i statistik skiljer sig alltså från matematikundervisningens i det att datorn inte endast används som pedagogisk hjälp utan kommer in som ett självklart arbetsverktyg (eller åtminstone bör göra det).

En vanlig fråga är vilket statistikprogram som är det bästa. Svaret beror mest på vad det ska användas till och mindre på om det är i en undervisningssituation eller inte, eftersom studenten ska få komma i kontakt med de verktyg som används professionellt.

Grovt räknat finns fyra typer av statistikprogram. Den första typen är kalkylbladsbaserade program. De påminner till utseende och användargränssnitt om de kalkylblad som finns i Claris eller Excel men har mycket färdigförpackade statistiska modeller och beräkningsprogram inbyggda. Till denna kategori hör SPSS, JMP, Statview med flera. Dessa program är bra för de många som ska göra rutinanalyser snabbt och få bilder utan att gräva ner sig i manualer. De ersätter både Excel å ena sidan och också ofta dyra SAS å andra sidan. Det är många användare som har störst nytta av dessa typer av program; de används vid marknadsundersökningar, mindre kliniska prövningar, inom biomedicin och de flesta områden där man snabbt behöver kunna analysera data med vanliga standardmodeller. Dessa program passar bäst inom undervisningen för biologer, läkare, ekonomer och andra som inte har matematisk modellering som huvudämne.

Den andra typen är programmerbara beräkningsmiljöer. Det dominerande programmet i denna kategori är Matlab. Inom den statistiska forskarvärden används också Gauss och Splus med liknande funktionalitet. Det finns till och med fri programvara som har mycket bra prestanda, exempelvis Octave, Rlab och Scilab. De här programmen är bra för ingenjörer och forskare som ska skriva simuleringsprogram, beräkna hållfasthet med finita-element-metoden, skriva program för sina egna statistiska metoder och sådant. Men man måste veta vad inversen av en matris är för att kunna använda dem. Det stora genomslaget har programmen fått därför att de ersätter programmering i Fortran och C i väldigt många tillämpningar.

Den tredje typen av program är de riktigt stora med ursprung i stordatorvärlden. Programmet SAS är störst och dyrast men även det finns numera i persondatorversion. Användningen är främst inom biomedicin och andra områden där volymen är stor och kraven på hanteringen av datamaterial är extremt höga.

Den fjärde typen av program är de som är smalt inriktade på vissa speciella modeller. Två exempel ur den stora mängden program är Statxact för exakt inferens ur kontingenstabeller och Simca för projektionsmetoder för multivariat dataanalys. I undervisningen har dessa program förstås bara intresse i vissa fortsättningskurser.

Erfarenheter i Lund

Vid Institutionen för matematisk statistik i Lund bedrivs undervisning i sannolikhetsteori och statistik på de flesta utbildningsprogrammen inom matematisk-naturvetenskaplig fakultet (MNF) och inom Tekniska högskolan (LTH). Vi använder Matlab i utbildningen av ingenjörer på LTH och både Matlab, Stata och SPSS på MNF. I de flesta kurser förekommer minst två datorlaborationer, i vissa kurser upp till fem stycken. Förberedelser krävs av studenterna men däremot ingen labbrapport. Undantag är i grundkursen på maskinsektionen där labbrapport krävs.

Kurspapper, labbinstruktioner och extentor finns att hämta på datornätet för att underlätta för studenterna. Dessa elektroniska papper är åtkomliga för alla, även för lärare och andra utanför Lund så den som vill bekanta sig med undervisningsmaterialet i Lund kan ladda ner det från webbsidan *http://www.maths.lth.se/matstat/*.

Två entydiga erfarenheter kan dras. För det första uppskattas verkliga datamaterial, till skillnad från simulerade eller tillrättalagda uppgifter. För det andra att man måste vara mycket tydlig med vad syftet är med en datorlaboration och låta detta syfte genomsyra allt. Vi lärare och forskare tar för givet att studenterna inser att man måste ha ett verktyg i form av en dator för att kunna angripa verkliga statistiska problem och att man måste öva på att använda det. Vi glömmer lätt att detta faktum inte alls är självklart för studenterna.

Efter dessa två erfarenheter tar likheten mellan studenter emellertid slut. Att åsikterna bland lärare vad gäller datorer i undervisningen varierar kraftigt konstaterades redan i konferensinbjudan. Detta gäller i än högre grad studenterna, som ger omdömen om datorinslag som allt från ”meningslöst” till ”roligt och intressant”. Den grupp studenter som får ut mest av datorinslagen är de som hänger med från början av kursen och följer studieplanen, och ett starkt motiv med datorinslag är just att kräva förberedelser. Från de allra mest självgående studenterna hörs emellertid ofta klagomål på tidsåtgången, speciellt på Tekniska högskolan, där mycket tid är schemalagd. De vill ha mer tid till att läsa boken i stället. De allra svagaste studenterna är ibland inte heller hjälpta av datorinslagen, då de inte får ut så mycket av dem. Deras förberedelser är otillräckliga. De som har mest nytta och glädje av datorinslagen är den breda majoriteten i mitten.

Matematikutbildning i förändring

Bo I Johansson
Chalmers och Göteborgs universitet

Sammanfattning

Förändringsarbetet inom matematikutbildningen vid Chalmers och Göteborgs universitet beskrivs mot en kort historisk bakgrund. Ett mål är att uppnå en syntes mellan matematik, numerisk analys och beräkningar. Datoranvändningen är viktig i detta sammanhang.

Inledning

Inom utbildningen i matematik pågår ständigt en förändring av såväl kursers innehåll och omfattning som deras uppläggning vad gäller föreläsningar och övningar. Även kurslitteratur förändras över tiden. Ibland utnyttjas externt skrivna böcker och vid andra tillfällen föredras egenhändigt framställda kompendier.

Naturligtvis har inriktning och framställning också skiftat från tid till annan. Inte heller pedagogiska reformer har uteblivit vid högskolan. Oftast har dock förändringar skett på basis av individuella initiativ.

Idag däremot pågår en intensiv diskussion bland lärare om ämnesinnehåll, inlärningsmetoder, datorberäkningar, etc. Det finns ett diskussionsklimat och en förnyelseanda inom detta område som förmodligen inte tidigare upplevts inom matematiska institutionen i Göteborg. Det pågår samtidigt ett förändringsarbete där många är involverade i skeendet och deltar med stor entusiasm i utvecklingen. Lärarlag har initierats för att bättre kunna forma såväl enskilda kurser som utbildningsprogram.

Allmänt kan sägas att vi bedriver kvalitativt experimenterande i form av nya arbetsmetoder inom utbildningen avseende inlärning och problemlösning. Problemformuleringarna kan numera vara av en mer djupgående och utvecklande karaktär, dvs. i allt större utsträckning vad som brukar betecknas modelleringsproblem. I vissa sammanhang försöker vi också införa mer matematisk modellering och därmed på ett naturligt sätt överföra matematiken till tillämpade ämnesområden.

Det har under senare år diskuterats mycket kring i första hand följande allmänna problemställningar inom matematikutbildningen i Göteborg:

- Vilken matematik ska framtidens studenter/teknologer förstå och behärska?
- Samspelet mellan matematik och numerisk analys. Det har skett och sker alltjämt en integration mellan kvalitativ och kvantitativ matematik.
- Det är allmänt känt att inlärningen styrs av examinationen. Hur ska vi kunna utnyttja detta faktum genom att låta examinationen vara en del i utbildningen?
- Datorns roll i utbildningen. Hur ska denna enorma potential som numera finns tillgänglig användas för att öka förståelsen för matematik, fördjupa de matematiska problemställningarna samt på ett naturligt sätt utnyttjas i utbildningen?

En tillbakablick

Inom matematiska institutionen, vilken är gemensam för Chalmers och Göteborgs universitet, har det förekommit datorlaborationer sedan ett drygt decennium. Då användes datorprogram anpassade efter specifika frågeställningar. De lärare som engagerade sig i denna tidiga fas hade en hög ambition, men studentmiljön (och även lärarmiljön) var relativt primitiv och bestod av ett fåtal PC och en skrivare. Det totala antalet laborationsmoment har sedan dess ökat i kvantitet såväl som i kvalitet. Under de första åren av denna epok skedde utvecklingen av laborationsmaterialet uteslutande genom enskilda individer, medan det under senare tid inte varit ovanligt med samarbete mellan flera personer för att åstadkomma ett bra laborationsmaterial. Det bredare engagemanget i dessa frågor märks framförallt genom diskussioner, seminarier och projekt.

Idag finns vid institutionen en mycket välutvecklad datormiljö med datorer för alla lärare och även en god tillgång till datorer för våra studenter. Datormognaden är numera stor bland både lärare och studenter. En ytterligare positiv faktor vad gäller nyttjandet av datorer är de generella datorintroduktionskurser som numera ges vid Chalmers och Göteborgs universitet.

Med tanke på vilka konsekvenser och vilka debattvågor som förekom när fickkalkylatorn blev var students/teknologs egendom är det inte svårt att föreställa sig vilken omvälvning datorn kommer att få för såväl kursernas framtida innehåll som de naturliga problemformuleringarna inom ämnesområdet. Dessutom kan detta ge helt andra möjligheter till nya och utvecklande examinationsformer.

Tillgången till datorkraft driver utvecklingen kring frågeställningar som räknefärdighet, examinationsformer, projektproblem, etc. Trots detta har introducerandet av datorlaborationer till dags dato inte uppenbart ökat den matematiska förståelsen eller den matematiska färdigheten hos studenterna. Ej heller har studentgenomströmningen ökat. Datorns införande har till dags dato inte heller reducerat den traditionella examinationen i nämnvärd utsträckning, utan istället genererat ytterligare arbete för examinatorerna.

Däremot har utnyttjandet av matematiska datorprogram förbättrat möjligheten att överföra matematiken i form av matematisk modellering till tekniska ämnen där samma datorprogram använts. Den terminologi och beräkningstekniska överföring som på detta vis sker från matematikämnet till tillämpade ämnesområden har visat sig ha en stor potential att förstärka matematikkunskaperna. Detta kan utvecklas ytterligare.

En pågående förändring

Datorn har givit matematikämnet en experimentell vinkling som tidigare inte funnits. Detta är någonting som tillför matematiken ytterligare dimensioner och borde kunna användas för att stärka den matematiska förståelsen. Vid sidan av experimentverktyg och laborationsmiljö är datorn också ett mycket kraftfullt hjälpmedel vid såväl symboliska kalkyler som numeriska.

En målsättning med förnyelsen inom matematikutbildningen innehåller flera naturliga komponenter. Man vill nå en fördjupad förståelse av matematiken, speciellt kursmaterialet, men även en ökad effektivitet, en bättre och högre kvalitet på såväl problemställningar och lösningsmetoder som kunskapsuppbyggnad. Dessutom är datorn i sig ett verktyg som ger användaren en väsentlig möjlighet att studera problem och dess lösningar på ett mångfacetterat sätt, vilket inte tidigare lät sig göras.

Ett stort arbete pågår för närvarande med att integrera datorberäkningar med den mer traditionella matematikutbildningen. En komponent som stärker denna utveckling har varit den samordning av numeriska aspekter och klassisk matematik som redan till viss del har skett. Den nya matematikutbildningen börjar nu ta form. En första realisering är under utarbetande.

En tillbakablick ger vid handen att det krävs en viss mognad innan saker faller på plats. I detta sammanhang gäller det datormognad, som idag finns hos både lärare och studenter. För bara några år sedan krävdes en övertydlighet i detta sammanhang. Idag har studenterna en god datorkunskap redan då de kommer till högskolan. Efter en kortare introduktion, som ger dem kännedom om den befintlig datormiljön och förmågan att hantera de vanligaste mjukvarorna, är studenterna redo att ge sig i kast med det mesta som har med datorer att göra. Även lärarna har idag en helt annan syn på och kunskap om datorer och dess möjligheter.

Ytterligare viktiga komponenter för en framgångsrik koppling mellan matematik och datorer är en god utvecklings- och programvarumiljö samt en driftsorganisation som på ett utmärkt sätt underhåller och utvecklar densamma.

Strategin

Beroende på utbildningens form kommer också upplägget beträffande matematikutbildningen att skilja sig åt. I exempelvis de relativt nystartade utbildningsprogrammen D^{++}, datalinjen vid Chalmers, och NP-programmet, utbildningsprogrammet naturvetenskaplig problemlösning vid Göteborgs universitet, vilka båda är PBI-baserade, ges en möjlighet att kontinuerligt utnyttja datorn som ett naturligt instrument. I samband med en övning i Fourieranalys kan studenterna enkelt beräkna Fourierkoefficienter, undersöka konvergenshastighet och analysera signaler. Därefter kan de fortsätta med frekvensanalys av signaler. Dessa problem blir, i en sådan miljö, mycket naturliga att direkt angripa medan diskussionen/undervisningen fortgår.

I andra sammanhang kan det vara naturligare att bedriva en integrerad undervisning inom kvalitativ och kvantitativ matematik, samt parallellt utveckla en beräkningsteknisk färdighet med hjälp av datorprogrammet Matlab, där problemställningar kopplar samman dessa parallella spår. Detta har utvecklats och tillämpas numera inom teknisk fysik vid Chalmers.

Inom hela utbildningen vid såväl Chalmers som Göteborgs universitet pågår en utveckling för att uppnå en syntes mellan (klassisk) matematik, numerisk analys och beräkningar.

En realisering av en förnyad matematikutbildning, enligt ovan beskrivna idéer, diskuteras för närvarande mellan företrädare för matematiska institutionen och utbildningslinjer vid Chalmers. Väsentliga komponenter i samarbetet är innehåll och form samt, inte minst, de brobyggnader som utgör gränsskiktet mellan matematik och teknik för att ta vara på matematikens styrka och därigenom få fram kraftfullheten i tillämpningarna.

Gränssnittet måste bestå av en brygga mellan matematik och tillämpning i form av exempelvis matematisk modellering, men även en förstärkning av matematiken inom de tillämpade ämnena på ett sätt som stärker samarbetet mellan matematik och tekniska/naturvetenskapliga ämnen är nödvändig.

Det finns dock en viktig aspekt inom teknisk och naturvetenskaplig utbildning som måste beaktas. Till skillnad från teknik är matematiken grundläggande och bestående, varför en matematisk förståelse är en nödvändighet för framtidens tekniker och naturvetare. Matematiken utgör också en viktig komponent i logiskt strukturerande och är utomordentligt väsentlig för kvalitativa aspekter och intuitiv förståelse. Matematiken är således fundamental för att de tekniska och naturvetenskapliga utbildningarna ska ha ett bestående värde över tiden.

Datorstöd i projektlinjens matematikutbildning

Gísli Másson
Stockholms universitet

Sammanfattning

Här kommer att beskrivas de erfarenheter vi har haft av att hålla i datorstödd matematikutbildning på Projektlinjen i matematik, fysik och matematisk statistik vid Stockholms universitet, de problem som vi har stött på och möjliga lösningar till dessa problem.

Om projektlinjen

Projektlinjen i matematik, fysik och matematisk statistik är en fyraårig utbildning i nämnda ämnen vid Stockholms Universitet. Projekt av storleken 5–10 poäng utgör en stor del av utbildningen. Dessa görs av studenterna i arbetsgrupper på ca 5 personer, under handledning av en lärare. I dessa projekt ingår mycket ofta konstruktioner av matematiska modeller och datorberäkningar. Tanken med utbildningen är att utbildade studenter ska kunna arbeta självständigt med uppgifter och problemställningar inom områdena matematik, statistik och fysik. I detta ingår att kunna använda datorer som hjälpmedel. I helhet präglas därför linjen av ganska omfattande datoranvändning.

Kursen Matematik P1 är den första kursen som studenterna läser på projektlinjen. Den består av 8 poäng inledande algebra och analys samt 2 poäng inledande datoranvändning. Som regel är studenterna nybörjare på universitetet när de läser denna kurs. I kursbeskrivningen för kursen står bl.a. ”…ge färdighet i att med hjälp av datorer såväl lösa matematiska problem som skriftligt redovisa lösningen.” Detta har vi som har haft kursen översatt till följande: Studenterna ska lära sig grunderna i att räkna på datorer med hjälp av matematikprogram och lära sig skriva Latex. Dessutom har vi undervisat lite i html för att studenterna ska kunna presentera sina projektrapporter på www. I början lärde vi studenterna i huvudsak använda Maple, men de två senaste åren har vi övergått till Mathematica.

Datorer i matematikutbildningen

Enligt min åsikt kommer datorer på två olika sätt in i matematikutbildningen på högskolenivå. Dels har de tillkommit som ett verktyg som en matematiker numera måste kunna använda i sitt arbete, precis som räknestickor och tabeller förut. Därför har det troligen numera blivit ganska vanligt att någon form av datorutbildning ingår i matematikutbildningar. Då tillkommer denna utbildning ofta som ett extra moment, antingen i form av en separat kurs eller som ett frivilligt eller obligatoriskt inslag i matematikkurser.

Å andra sidan är det relativt uppenbart vilka möjligheter datorer har som ett hjälpmedel i matematikundervisningen. De kan komplettera böcker och lärare genom sina rörliga bilder, sin tredimensionella grafik, interaktivitet och så vidare. Dessutom ger datorer möjligheter att experimentera och möjligheter att använda mer realistiska uppgifter än vad som tidigare har varit möjligt. Till sist ger datorer bättre möjligheter att uttrycka sig skriftligt genom alla matematiska ordbehandlings- och typsättningsprogram som numera finns. Detta ger t.ex. möjligheter till uppgifter där hårdare krav kan ställas på framställning och stil, förutom rätta lösningar.

Genomförande av mål

Enligt citat ovan ur kursbeskrivningen för kursen Matematik P1, ingår i kursen utbildning på datorer som verktyg. Det förefaller därför som ganska naturligt att försöka utnyttja tillgången på datorer och det faktum att studenterna ska lära sig hantera datorer, för att använda datorer som hjälpmedel i matematikundervisningen. Detta har vi gjort genom att konstruera laborationer vars mål är att öka förståelsen för specifika matematiska begrepp. Dessutom har vi gjort inlämningsuppgifter där datorberäkningar och experimentering ingår direkt eller indirekt. Till sist har i vissa fall förekommit hos oss maskinskrivna inlämningsuppgifter med högre krav på framställning.

Erfarenheter av datorn som verktyg

Hur har det gått att lära studenterna använda datorn som ett verktyg?

Efter kursen typsätter många studenter matematik i Latex utan problem. Möjligen är de motiverade av att de behöver dessa kunskaper för kommande projekt.

Datorer används också flitigt vid beräkningar på projekt, men i många fall görs dessa beräkningar direkt eller indirekt på beställning av handledaren. Det har förekommit spontan användning av datorer på årskurs 1, där studenter på eget initiativ har omformulerat matematiska problem till datorberäkningar och genomfört dessa, men detta är sällsynt. Ett möjligt hinder för en sådan användning är att kursens omfattning inte tillåter någon genomgång av programmering.

Sammanfattningsvis tycker jag att vi i stort sett har lyckats med att lära studenterna använda datorer som verktyg.

Erfarenheter av datorn som hjälpmedel vid undervisning

Vår erfarenhet av matematiklaborationer, dvs. laborationer där datorn ska användas som hjälpmedel för att förklara matematik, kan summeras i följande mening: Antingen susar laborationen förbi på returtangenten eller så fastnar den i hakparanteser.

Uttalandet i föregående paragraf kräver nog en närmare förklaring. Ett sätt att utforma en matematisk laboration är att utarbeta något problem i till exempel en Mathematica-notebook och sedan i princip endast lämna åt studenter att trycka på returtangenten ett antal gånger för att utföra själva beräkningarna. Detta brukar studenter klara av ganska bra, men tyvärr brukar de för de mesta missa mycket av det matematiska innehållet i laborationen. Ett annat sätt att konstruera en laboration är att ge studenterna en matematisk uppgift som de ska lösa på egen hand och på något sätt ge dem tillräcklig information om datorprogrammet, så att de kan koncentrera sig på det matematiska innehållet i uppgiften, eftersom i detta fall syftet är att använda datorn som hjälpmedel, inte att lära studenterna använda datorn som ett verktyg. Då visar det sig mycket ofta att en hel del oväntade problem uppstår, som har mer att göra med kommunikationen dator-människa än problemet att förstå det matematiska innehållet. Till exempel har vi ofta observerat att en relativt ny användare av Mathematica helt enkelt inte ser var eller om en hakparantes saknas i ett uttryck och förstår inte de felmeddelanden som uppstår i samband med detta. Detta brukar orsaka en hel del slöseri med tid och ge upphov till frustration.

De två typer av laborationer som jag har beskrivit ovan är ju förstås extrema åt var sitt håll, så man kan undra om inte lagom är bäst. Men lagom verkar inte fungera så bra heller. Vi har också provat att konstruera laborationer som egentligen bara handlar om att trycka på returtangenten och som sedan mot slutet består av ett matematiskt problem som kan lösas genom att göra relativt små förändringar av det utarbetade exemplet. I så fall susar första delen förbi och så fort studenterna ska ändra på Mathematica-koden kör de fast i alla möjliga datorrelaterade problem, som man absolut inte kunde föreställa sig innan. I vilken mån sådana problem uppstår varierar förstås mellan individer, men man kan undra om inte deras tid utnyttjas bättre genom matematisk problemlösning på traditionellt sätt?

Fördelen med inlämningsuppgifter är att där är man inte beroende av den ganska så begränsade tidsram som man har i en laboration. Därför kan man hoppas på att studenterna känner mindre tidspress på sig att tillgodogöra sig förklaringar snabbt för att sedan kunna lösa sin uppgift. Men det verkar inte hjälpa. Även till synes lätta uppgifter blir ibland närmast olösbara i och med att studenterna väljer en annan än den tänkta metoden för att lösa problemet, en metod som möjligen skulle kunna leda till rätt svar, men som datorn inte kan lösa pga begränsningar av minneskapacitet och liknande.

Sammanfattningsvis är vår erfarenhet att vi än så länge inte lyckats bra med att använda datorn som ett hjälpmedel för att öka förståelsen av matematik.

Problemanalys och lösningar

Varför har vi inte lyckats bättre med att använda datorn som ett hjälpmedel vid matematikundervisning?

En av förklaringarna är säkert den att det finns liten eller ingen erfarenhet att bygga på. Vi lärare har själva egna minnen från föreläsningar och därifrån åsikter om vad som är dåligt eller bra med dessa. Däremot har ingen av oss egna erfarenheter av att vara elev i datoriserad undervisning och därför kan det vara svårt att sätta sig in i hur givande datorlaborationer egentligen är.

En annan möjlig orsak till problemen kan vara avsaknad av lämpliga datorprogram. Program som Mathematica, Maple, Matlab osv. är mycket bra beräkningsverktyg och en kunnig användare kan använda dessa program både som beräkningsverktyg och som hjälpmedel för att bättre förstå matematiska begrepp. Men enligt min åsikt är dessa program inte alls välanpassade för att användas i undervisningssammanhang, då de är så pass svåra att använda att risken är stor för nybörjare att matematiskt innehåll drunknar i syntax och datorproblem.

Hur kan man då lösa detta? Det kan förstås hända att man med mer erfarenhet kan lyckas konstruera laborationer som upplevs positivt av studenterna och som på ett effektivare sätt kan förmedla förståelse av matematik. Jag misstänker dock att det krävs datorprogram som är bättre anpassade till undervisningen, program som på något sätt har mer begränsade användargränssnitt och är sådana att användaren inte fastnar i syntaxproblem. Samtidigt måste sådana program vara gjorda på ett sådant sätt att man inte kan ta sig genom laborationer utan någon typ av kontroll, till exempel genom uppgifter som måste lösas innan man kan gå vidare i laborationen. I annat fall hamnar man lätt i samma situation som i den första typen av laborationer jag beskrev. Rätt konstruerade tror jag att sådana program kan vara till stor hjälp, men samtidigt tror jag att de kan vara rätt så dyra att utveckla. Man får räkna med att lägga ner mycket mer resurser än vad som nu görs för att anskaffa undervisningsmaterial på datorer i matematik.

Datorlaborationer i matematikundervisningen

Ingemar Nåsell
KTH

Sammanfattning

Datorlaborationer ingår sedan 1994 i alla grundkurser i matematik vid KTH. Jag beskriver den infrastruktur som införts för att stödja detta inslag i utbildningen. Några av erfarenheterna av att använda datorlaborationer i undervisningen diskuteras.

Genomförande

Datorlaborationer ingår sedan höstterminen 1994 i alla kurser i grundutbildningen i matematik vid KTH. Dessa kurser ges till studenter i de två första årskurserna. Varje årskull omfattar cirka 1400 studenter. Under första året läser alla studenter tre kurser i matematik. En av dessa kurser är i linjär algebra och de två andra är i differential- och integralkalkyl. Under det andra året läser alla studenter en kurs i differentialekvationer och transformteori, och några studenter läser dessutom en kurs i komplex analys.

Ett beslut att införa datorlaborationer i matematikundervisningen fattades formellt vid ett sammanträde med styrelsen vid matematikinstitutionen under höstterminen 1993. Vårterminen 1994 användes för att bygga upp en del av den infrastruktur vid institutionen som är nödvändig för detta inslag i undervisningen. Infrastrukturen, både inom och utom institutionen, beskrivs närmare nedan. Matematikinstitutionen har givit ett starkt stöd till uppbyggandet och vidmakthållandet av infrastrukturen inom institutionen.

Denna rapport behandlar endast undervisningen i matematik i civilingenjörsutbildningen vid KTH:s campus på Valhallavägen i Stockholm; den omfattar inte den ytterligare undervisning i matematik som bedrivs vid ingenjörsskolan vid KTH.

Målsättning för undervisningen i matematik

En naturlig målsättning för undervisningen i matematik är att den dels ska ge förståelse för begrepp och sammanhang, och dels ge förmåga att använda de matematiska resultaten för att lösa ett antal problemtyper av betydelse för tillämpningarna i de tekniska ämnena. Tillkomsten av datorprogrampaket som tillåter en att symboliskt och numeriskt lösa en mängd uppgifter leder naturligen till att balansen mellan dessa två målsättningar ändras. De nya datorverktygen leder till att gamla målsättningar ifrågasätts. Genom att lärarna utvärderar vad som kan göras med de nya datorverktygen åstadkoms en nyttig förnyelse i undervisningen.

Målsättning för datorlaborationerna

En av målsättningarna för datorlaborationerna är att de ska ge studenterna förtrogenhet med det programpaket (Maple) som används i undervisningen vid KTH. Vid det arbete i tillämpad matematik som de senare möter i de tekniska tillämpningarna har de därigenom tillgång till ett kraftigt verktyg som tillåter dem att arbeta med långt mer realistiska problem än som eljest är möjligt.

En andra målsättning är att datorlaborationerna ska användas som ett pedagogiskt hjälpmedel för att förbättra förståelsen av matematiska begrepp och sammanhang. Detta kan åstadkommas genom att programpaketet enkelt tillåter en grafisk framställning som ofta kan ge en märkbart förbättrad intuitiv förståelse för de matematiska resultaten. Programpaketet kan också användas för att införa en ny dimension i den klassiskt deduktiva matematiken: det är möjligt att snabbt och enkelt genomföra experiment och att testa olika idéer som eleven har.

Infrastruktur

Det behövs en viss infrastruktur i studenternas inlärningsmiljö och på matematikinstitutionen för att det ska vara möjligt att genomföra datorlaborationer i matematikundervisningen. Några korta kommentarer ges nedan till denna infrastruktur.

Datorer

Det är nödvändigt att alla lärare har tillgång till datorer så att de själva kan använda och utveckla de datorlaborationer som används i undervisningen. Tillgängligheten till datorer motiveras också av lärarnas behov av datorer för andra ändamål än undervisning, såsom verktyg i forskningen, samt för att skriva rapporter och publikationer och för att kommunicera via e-post och hämta information från Internet. Matematikinstitutionen vid KTH har insett hur viktigt detta är, och varje lärare har numera tillgång till en egen dator för dessa ändamål. Dessa datorer är, med några få undantag, SUN arbetsstationer som arbetar med ett operativsystem som är en variant av UNIX.

Institutionen har en egen datorsal med både SUN-stationer, persondatorer och Mac. Datorsalen används vid kurser för lärare, av gästforskare och av studenter som gör examensarbeten. På grund av den stora undervisningsbördan är det inte möjligt att använda datorerna i denna sal för kurserna i grundutbildningen.

Samtliga delfakulteter vid KTH har inrättat datorsalar för sina studenters arbete. Dessa datorsalar används för våra datorlaborationer men också för datorarbeten i många andra kurser. En del av dessa datorsalar är utrustade med arbetsstationer under UNIX, medan andra har persondatorer med Microsoft Windows. Många studenter har också egna datorer i bostaden.

Programvara

Som nämnts ovan används Maple i datorlaborationerna. KTH har sitelicens på Maple, Mathematica och Matlab. Varje lärare har tillgång till Maple på sin institutionsdator, och Maple är också installerad på datorerna i matematikinstitutionens datorsal och i studenternas datorsalar. De studenter och lärare som har egna datorer i bostaden kan arbeta med Maple på dessa datorer. Programvaran tillhandahålls på CD-skivor av KTH.

Användarstöd

Användarstöd för både studenter och lärare har inrättats på KTH. Hit kan man vända sig för att få hjälp med tekniska detaljer när det gäller att använda programvaran både på egna datorer och på datorer i KTH:s datorsalar. Användarstödet bemannas av äldre teknologer med datorvana.

Datorlaborationer

De datorlaborationer som används i de olika kurserna i matematik har utvecklats av enskilda lärare vid institutionen. Institutionen har uppmuntrat sina lärare att skriva sina egna laborationer och att integrera laborationerna i undervisningen. Detta har också bidragit till en kompetenshöjning bland lärarna på datoranvändningssidan. Omfattningen och redovisningsmetoden för laborationerna varierar mellan kurserna. Ansvaret för att bestämma dessa detaljer vilar på den enskilde kursledaren. Nya versioner av Maple utkommer med ojämna tidsintervall. De nya versionerna kräver i vissa fall en omarbetning av datorlaborationerna. En sådan omarbetning görs också för att inkorporera nya idéer och för att införa förbättringar på basis av de erfarenheter som vunnits i användningen av datorlaborationer i undervisningen.

Kurser

Under vårterminen 1994 arrangerades en datoranvändarkurs som gavs till samtliga institutionens lärare. En minikurs i Maple har skrivits som ger en informell introduktion till Maple. Den kan läsas på cirka fyra timmar. Vid varje hösttermins början ges en kurs för nyanställda lärare och för de övriga lärare som önskar friska upp sina kunskaper och ta del av nyheter bland datorlaborationer och Maple. Den senaste versionen av Maple används i kursen.

De flesta delfakulteter ger en datorintroduktionskurs till alla sina nyantagna teknologer vid början av varje hösttermin. I denna kurs ges en allmän information om datorresurserna som finns tillgängliga för teknologerna. I kursen ingår också en introduktion till Maple i form av en minikurs (mindre än minikursen för lärarna) som skrivits på matematikinstitutionen.

Erfarenheter

En del kursledare har krävt muntlig redovisning vid en dator av datorlaborationerna, medan andra har bett studenter att lämna in en skriftlig redovisning. Det första redovisningssättet kräver litet mer datorvana av läraren (och av studenten!), men kan avgjort rekommenderas. Det ger god kontakt mellan lärare och student, och det ger tillfälle till att diskutera några enkla matematiska problem på ett informellt sätt. Det är också lätt för läraren att med några enkla frågor övertyga sig om att studenten själv förstår vad han/hon har gjort. Risken för att några studenter kopierar vad deras kamrater har gjort utan att själva förstå är betydligt större vid skriftlig redovisning.

Ett sätt att bedöma resultatet av datorlaborationsinslaget i undervisningen är att göra en enkät bland studenterna efter kursens slut. Det är då viktigt att efterfråga både studenternas bedömning av värdet av datorlaborationerna och deras datorkunskaper. Vi har funnit att det finns ett starkt samband mellan svaren på frågorna inom dessa två områden. De studenter som har god datorvana ger ett betydligt högre betyg åt datorlaborationerna än de som har dåliga datorkunskaper.

En annan erfarenhet från arbetet med datorlaborationer är att lärarnas engagemang och attityder är betydelsefulla för att detta inslag i undervisningen ska ge ett bra resultat. Studenternas bedömning av värdet av datorlaborationer är högre om lärarna är kunniga användare av datorprogrampaketet och om datorlaborationerna är integrerade i den övriga undervisningen. Entusiasmen hos en lärare kan lätt smitta av sig på studenterna.

En slutsats som kan dras av våra erfarenheter är att undervisning i datoranvändning för lärare och studenter kan ge god utdelning i form av effektivare undervisning i matematik.

Excellent exercis eller exagererad examination?

Esbjörn Ohlsson
Stockholms universitet

Sammanfattning

Att uteslutande använda färdiga programpaket på en kurs kan medföra att förståelsen går förlorad. Inledande handräkning behövs för att befästa kunskap om begrepp och metoder. Denna handräkning, som vanligen utförs med miniräknare, kan med fördel utföras med ett kalkylprogram. Ett problem i sammanhanget är dock hur examinationen ska gå till.

Datorn som professionellt och pedagogiskt redskap

Datorer har använts i undervisningen i matematisk statistik vid Stockholms universitet sedan (åtminstone) 1983. Sedan början av 90-talet förekommer laborationer eller projektarbete med datorer på en majoritet av våra kurser. Undantaget är mer teoretiska kurser, exempelvis fortsättningskursen i sannolikhetsteori. Datoranvändningen kan delas in i två huvudtyper:

1. *Datorn som (semi-) professionellt verktyg.* Här används statistikprogram på ett sätt som liknar den yrkesverksamme statistikerns arbetssätt (alternativt medicinarens, naturvetarens, etc.). Syftet är dels att lära ut programvaran *i sig*, dels att ge möjlighet till arbete med mer realistiska problem, vilket ofta innebär arbete med stora datamängder. Exempel på programvaror som används är SAS och JMP.

2. *Datorn som pedagogiskt verktyg.* Här används datorn som verktyg för inlärning, delvis för att befästa kunskaper som traditionellt lärs ut med föreläsningar och problemlösning för hand. Viktigare är kanske att studenterna får möjlighet till en bättre förståelse av ämnet än vad som kan åstadkommas med traditionell problemlösning. Ofta handlar det om att experimentera: ”Vad händer om jag ändrar dessa värden?”,

simulera eller på andra sätt undersöka egenskaper hos begrepp och metoder. Exempel på programvaror är Excel och Mathematica. Även om huvudsyftet här inte är kunskap om programvaran i sig, försöker vi välja program som studenterna kan ha nytta av i en framtida yrkesverksamhet. Rena demonstrationsprogram och utbildningsprogram används normalt inte.

Naturligtvis innehåller många kurser inslag av både 1 och 2 samtidigt. Professionell statistikprogramvara kan givetvis även användas för att experimentera.

Handräkning eller dator i statistikundervisningen?

I framför allt USA finns en debatt om huruvida numerisk handräkning överhuvudtaget behövs inom statistikundervisningen i datoråldern; se Khamis (1991) och den tillhörande diskussionen i Shannon & Norman (1993) för en introduktion.

Khamis argumenterar bestämt för att *handräkningen* har ett stort pedagogiskt värde. Handräkningen befäster teorikunskaper och studenterna lär sig förstå hur metoder är uppbyggda. Vidare bygger man upp ett självförtroende när man fullständigt kontrollerar situationen och genomför hela kalkylen själv. Att direkt använda ett datorprogram (eller en miniräknarfunktion) medför en risk att metoden blir en obegriplig ”black box”.

Jag anser, med Khamis, att på samma sätt som användning av miniräknare i grundskolan bör föregås av handräkning – för förståelsens skull – bör universitetsstudenternas användning av statistikprogram föregås av ”handräkning”, dvs. räkning med miniräknare utan användning av förprogrammerade statistikrutiner. Huvudidén i denna artikel är dock att ett kalkylprogram i många situationer med fördel kan ersätta miniräknaren. Denna idé är naturligtvis inte helt ny, se t.ex. Soon (1991).

Beräkningarna kan organiseras på kalkylblad på ungefär samma sätt som vid handräkning. Under förutsättning att inga förprogrammerade makron eller funktioner används har studenten fullständig kontroll över situationen. Samtidigt behöver varje aritmetisk operation bara specificeras en gång, den kan sedan enkelt kopieras till att gälla i ett stort antal celler. Därigenom reduceras den aritmetiska exercisen till ett minimum.

I bästa fall förenar (eller förstärker!) kalkylprogrammet handräkningens pedagogiska fördelar med datorernas reduktion av beräkningsvolymen och deras möjlighet till experiment. Låt oss som illustration se på ett mycket enkelt exempel, nämligen beräkning av en stickprovsvarians.

Exempel: Beräkning av en stickprovsvarians

Definitionen av stickprovsvariansen är

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \quad (1)$$

För handräkning anger läroböckerna normalt även den ekvivalenta formeln

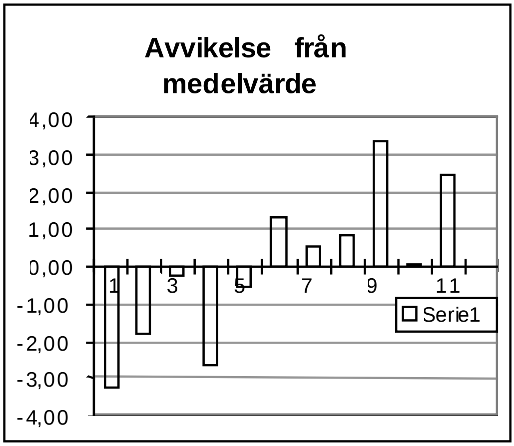
$$s^2 = \frac{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \qquad (2)$$

Även om denna formel är beräkningsmässigt enklare, saknar den nästan helt pedagogiskt värde. Det är, som var och en kan se, ur definition (1) man lär sig något om s^2:s egenskaper, inte ur definition (2). Med ett statistikprogram kan vi naturligtvis snabbt beräkna s^2 för godtyckligt stora datamängder. Här följer ett SAS-program för detta.

```
proc means data=xfile var;
var x;
run;
```

Om man vill undvika besvärlig programsyntax kan alternativt ett menybaserat program användas. Frågan är nu bara vad vi lärt oss om s^2 av dessa bekväma beräkningar? Låt oss i stället se på ett Excel-blad för ”manuell” beräkning av s^2, dvs beräkning utan att använda Excels inbyggda s^2-funktion.

n=	11			
		x	x - medel	dito ^2
		4,26	-3,24	10,50
		5,68	-1,82	3,32
		7,24	-0,26	0,07
		4,82	-2,68	7,19
		6,95	-0,55	0,30
		8,81	1,31	1,71
		8,04	0,54	0,29
		8,33	0,83	0,69
		10,84	3,34	11,15
		7,58	0,08	0,01
		9,96	2,46	6,05
	Summa	82,51	0,00	41,27
	Medel/s2	7,50		4,13
			s=	2,03



Här har vi utgått från definitionen av s^2. Beräkningen är gjord på några få minuter tack vare ”autofill” som enkelt kopierar en beräkningsformel från en rad till ett godtyckligt antal andra rader. Vi ser hela kalkylen steg för steg som vore den gjord för hand med papper och penna. Egenskaperna hos s^2 framträder tydligt. Till detta har lagts en bild som visar avvikelserna från medelvärdet, vilka förtjänar att jämföras med standardavvikelsen *s*.

Vi kan nu börja experimentera med att ändra enstaka värden och se hur s^2 förändras, hur outliers eller trimning påverkar dess värde etc. Hela tiden ser vi alla steg i kalkylen, inte bara slutresultatet, vilket är fallet när vi använder ett standardprogram.

Observera att Excel i detta fall ersätter *handräkning*. Däremot menar vi naturligtvis inte att man ska göra på detta sätt vid *professionell* beräkning av standardavvikelser: för detta ändamål används naturligen ett standardprogram (eller Excels inbyggda funktion för s^2). Idén är således att använda Excel för att undersöka och befästa kunskapen om den statistiska metoden, men därefter gå vidare till professionella verktyg.

Faktum är att i detta fall lär man sig troligen *mer* än vid traditionell handräkning, eftersom definitionen (1) kan användas i stället för den intetsägande formeln (2). Det kan tilläggas att man genom att använda de i Excel inbyggda sannolikhetsfördelningarna även slipper ett otidsenligt och ur pedagogisk synvinkel ointressant slående i statistiska tabeller.

Exemplet Logistisk regression

Datorutvecklingen har möjliggjort en bred användning av statistiska metoder som kräver så pass omfattande beräkningar att handräkning är omöjlig eller endast kan genomföras i mycket begränsad omfattning. Här kommer kalkylprogram väl till pass. Ett exempel är en påbyggnadskurs i logistisk regression och log-linjära modeller där vi använder Excel på bred front (Ohlsson 1996). Så gott som hela det traditionella handräknandet har ersatts av inlämningsuppgifter med Excel. För att även ge ett professionellt verktyg görs vissa projekt med SAS – men först efter omfattande arbete med Excel.

Examination

Ett problem vid all datoranvändning är examinationen. På våra kurser tillämpas blandade redovisningsformer. Vissa uppgifter lämnas in skriftligt, men huvudsakligen görs redovisningarna "live" vid datorn. Detta dels för att många frågeställningar (medvetet) saknar ett entydigt svar och därför kräver diskussion, dels för att undvika att någon student klarar arbetet med otillbörligt stor hjälp av sina kamrater. I fallet med kalkylprogram gäller dessutom att det är svårt att skriftligt kommentera felaktiga beräkningar.

Problemet är dock att examination "live" är mycket arbetskrävande. Det är också svårt att särskilja rollen som handledare och examinator. I praktiken leder detta till en oro för att det ska bli för lätt att klara kursen – om studenterna gör något fel leder ju handledaren in dem på rätt väg igen. Om läraren i slutändan finner att studenten inte presterat tillräckligt mycket självständigt arbete är det svårt att underkänna henne/honom eftersom möjlighet till "omtentamen" inte ges på något naturligt sätt. Vi har valt att även på kurser med omfattande datorövningar ha en skriftlig teoritentamen. Om vi ska ta datorövningar och projektarbeten på allvar måste vi finna tillfredsställande sätt att examinera dessa. Det finns idag en överhängande risk att såväl studenter som lärare tänker att "tentan är ändå viktigast", eftersom det är där man "skiljer agnarna från vetet".

Förhoppningsvis kommer vi i framtiden att fortsätta gå mot en undervisning som innehåller mer av självständigt arbete, mer realistiska data och fallstudier och mindre av traditionella räkningar av standardtal. Frågan är bara hur vi ska orka med den därtill hörande examinationen utan att sänka kvalitetskraven, samtidigt som antalet studenter ökar. Nya, effektiva sätt att examinera datoruppgifter skulle vara synnerligen välkomna.

Referenser

Khamis, H. J. (1991). Manual Computations – A Tool for Reinforcing Concepts and Techniques. *The American Statistican 45*, pp 294–299.

Ohlsson, E. (1996). Räkneövningar med Excel: Log-linjära modeller och Logistisk regression. Kompendium, Matematisk statistik, SU.

Shannon & Norman (1993). Letter to the editor. *The American Statistican 47*, pp 79–80.

Soon, T.-W. (1991). The Computer Spreadsheet: A Versatile Tool for the Teaching of Basic Statistical Concepts. *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics, ICOTS3, Vol.1*, 187–192.

En matematiklaboration per kurs

Håkan Sollervall
Uppsala universitet

Sammanfattning

Under 1998 har en arbetsgrupp vid Uppsala universitets matematiska institution sökt lämpliga former för datoranvändning i första årets matematikkurser på våra civilingenjörsprogram. Detta arbete har resulterat i införande av MATEMATIK-laborationer, en på varje kurs.

Bakgrund

Hösten 1994 fick vår institution medel från Grundutbildningsrådet för att introducera programmet Maple i grundutbildningen. Läsåret 1994–1995 producerade Leif Abrahamsson och Bo Styf ett stort antal övningar till kursen Envariabelanalys för de båda civilingenjörsprogrammen Miljö- och vattenteknik samt Materialfysik. Dessa övningar utprovades i fyra lektionsgrupper, som alla hade schemalagd tid i datorsal.

Under de två följande läsåren togs övningar fram till kurserna Grundläggande algebra och Linjär algebra. Flera grupper (ca 10 varje läsår) och flera lärare hade schemalagd lektionstid i datorsal. Studenterna var under det första året ganska positiva till övningarna, men under de senare åren fick dessa allt mer negativa omdömen. Studenterna ansåg särskilt att de fick ägna alltför mycket tid åt den komplicerade Maple-syntaxen och att de därför inte hann tillägna sig det matematiska innehållet i övningarna.

Läsåret 1997–1998 var övningarna ett frivilligt inslag i kurserna.

Arbetsgruppens arbete: fas I

Vår institution beslutade våren 1998 att tillsätta en arbetsgrupp bestående av fyra lärare och fyra studenter med uppgift att undersöka om vi borde återuppta datoranvändningen i de inledande kurserna på civilingenjörsprogrammen. Under arbetet kom vi ganska snart in på att diskutera datorlaborationer. Nedan redovisas några synpunkter vi bedömde som viktiga.

- laborationerna ska stödja studentens matematiska utveckling
- laborationerna ska behandla enkla moment i kurserna (får ej vara tidskrävande)
- det matematiska innehållet ska betonas
- studenten ska öva sig i att uttrycka sig matematiskt
- studenten ska uppmanas att arbeta både för hand och med dator
- studenten ska fås att inse datorns möjligheter som matematiskt verktyg
- studenten måste få detaljerade instruktioner, såväl vad gäller genomförande av laborationerna som hantering av beräkningsprogram

Arbetsgruppen kom fram till att föreslå införande av matematik-laborationer. Att använda datorer och lära sig använda beräkningsprogram bedöms vara mindre viktigt än att tillägna sig matematiken.

För att inte alltför mycket störa den ordinarie (enligt studenternas värderingar väl fungerande) matematikundervisningen bedömde vi det lämpligt att ha **en** laboration i var och en av kurserna Envariabelanalys, Grundläggande algebra och Linjär algebra. Att ha laborationer i så liten omfattning ställer stora krav på det material som ska användas. Materialet måste innehålla detaljerade anvisningar och stöd för hantering av aktuella beräkningsprogram. Vi valde att enbart använda Maple, dels med tanke på personalens kompetens, dels med tanke på att universitetet har en site-licence för Maple. Vi bedömde att äldre studenter kan användas som handledare vid de två timmar som schemaläggs i datorsal för varje laboration. Dessa handledare har studenterna mött tidigare under kursen Introduktion till datoranvändning, som ges till samtliga nybörjare och ger nödvändiga baskunskaper i att hantera datorer.

Arbetsgruppens arbete: fas 2

Det egentliga arbetet med att utforma laborationerna påbörjades i slutet av mars 1998. Att ta fram ett material som ska kunna användas av förstaårsstudenter vid ett enstaka tillfälle i varje kurs bedömdes kräva en hel del arbete. De lärare (Kerstin Ekstig, Lennart Salling, Bo Styf, Håkan Sollervall) som ska arbeta med att ta fram laborationsmaterialet får därför viss kompensation av institutionen i form av nedsatt undervisningstid. Studentrepresentanterna ställde upp som utvärderare/förslagsgivare och föreslog bland annat att varje laboration bör redovisas i form av en skriven rapport, vilket vi förde in som ett moment i laborationen.

Materialet, i form av ett skrivet häfte, utformas allmänt med tanke på att ge studenten **så mycket stöd som möjligt** i alla delar av laborationen. Materialet inleds med en motiverande diskussion om varför vi har matematiklaborationer. Sedan följer tips och allmänna instruktioner, laborationsbeskrivningar, allmänna Maple-tips, utskrivna hjälpfiler, råd och anvisningar till rapportskrivning och allra sist ett exempel på en färdigskriven rapport.

Större delen av materialet utgörs av laborationsbeskrivningarna. Varje sådan inleds med en kort presentation av det matematiska innehållet (en sida) som också innehåller tips om vilka Maple-kommandon som kan vara användbara. Uppgiftssidan (andra sidan) är uppdelad i två delar. Första delen består av 2–3 förberedande ganska enkla uppgifter, som är tänkta att lösas för hand. Dessa uppgifter **ska** lösas innan studenterna (de arbetar två och två i grupp) kommer till den schemalagda lektionen i datorsal. De förberedande uppgifterna belyser metoder som kan användas vid den egentliga laborationen. Syftet är att studenterna ska komma väl förberedda till datorsalen.

Vi har dessutom lagt ner en del arbete på att ta fram lämpliga hjälpfiler till Maple. (Enligt min uppfattning har Maples hjälpfunktion grava pedagogiska brister, för att inte tala om programmets syntax som är hopplöst föråldrad. Trots detta kan jag inte finna något bättre alternativ bland kända program såsom Derive, Excel, Mathcad, Mathematica, där de två sistnämnda kanske ligger närmast till hands som alternativ.) Hur som helst anser vi att Maple blir ett ganska bra verktyg när det används tillsammans med tips om kommandon (t.ex. solve och plot för den laboration som behandlar interpolation) och de hjälpfiler vi har tagit fram till dessa kommandon.

Återstående arbete

I skrivande stund hösten 1998 ska de första grupperna ha sina första lektioner i datorsal. Naturligtvis är vi mycket nyfikna på studenternas värderingar. Dessa borde vara sammanställda i november/december. Hör gärna av er till soller@math.uu.se om ni vill veta hur det gick.

En separat kurs för datorstödda matematikverktyg

Inge Söderkvist
Luleå tekniska universitet

Sammanfattning

Vid Luleå tekniska universitet ges sedan två år tillbaka en 2-poängskurs med namnet Introduktion till Datorstödda Matematikverktyg. Kursen avser att ge studenterna en överblick över existerande sådana verktyg samt erfarenhet av praktiskt användande av verktygen Matlab och Maple. Vi ger en kort presentation av kursen vad gäller bakgrund, innehåll och undervisningsformer samt diskuterar erhållna erfarenheter. Mer information om kursen kan man hitta på WWW-sidan "http://www.sm.luth.se/~inge/courses/MAM098/MAM098.html".

Bakgrund och målsättning

I grundkursen i matematik på civilingenjörsprogrammen i Luleå övergick man för fyra år sedan från att använda programmet Matlab till att använda Maple som verktyg i undervisningen. Detta ledde till att teknikämnena i högre årskurser fick studenter utan erfarenhet av Matlab, vilket man upplevde som en betydande svårighet. Vi beslöt därför att erbjuda en kurs där man kunde lära sig grunderna i Matlab men även fördjupa sitt kunnande i användandet av andra matematikverktyg. Målsättningen var att ge studenterna en översikt över olika verktyg och en kunskap om dess starka och svaga sidor, samt att studenterna skulle erhålla en sådan färdighet i praktiskt användande av Matlab och Maple att de själva kan nyttja dessa verktyg när de känner behov av detta.

Kursinnehåll och undervisningsformer

Kursinnehållet fördelas enligt : orientering om olika verktyg 5 %, Matlab 65 %, Maple 25 % och Unix 5 %. Tonvikten på Matlab motiveras av teknikämnenas behov samt att vi vid matematikinstitutionen erbjuder andra fördjupningskurser i Maple. Tanken var att studenterna i stor utsträckning skulle arbeta självständigt (eller i grupp) och söka sig till ny kunskap och erfarenhet på egen hand. Som stöd och komplement till dessa enskilda studier erbjöd institutionen 4 st. föreläsningar, 4 st. lärarledda datorpass samt individuell handledning vid behov. Föreläsningarnas syfte var att väcka intresse för verktygen och att ge en överblick över när och hur verktygen bör användas. Moment som erfarenhetsmässigt visat sig svåra att förstå för många studenter förklarades, t.ex. hur man skickar funktioner som parametrar till funktioner i Matlab, vad det är för skillnad på en funktion och ett uttryck i Maple och hur de olika datastrukturerna fungerar i Maple. Små tips som är bra vid det praktiska handhavandet gavs också, t.ex. hur man avbryter en pågående exekvering, hur man enklast ”debuggar” sina program, hur man hittar lämpliga kommandon, hur man tolkar felmeddelanden, etc. Sådana små viktiga detaljer är ofta svåra att hitta i manualer. Däremot ägnades nästan ingen tid till att gå igenom syntax och kontrollstrukturer, vilket lämnades till självstudier.

Examinationen bestod av 3 st. inlämningsuppgifter:

- en större uppgift i Matlab med en hel del programmering, se nedan,
- många små uppgifter i Maple varav någon kräver egendefinierade procedurer,
- enklare övning i att använda Matlab och Maple under Unix (mycket lätt för de flesta).

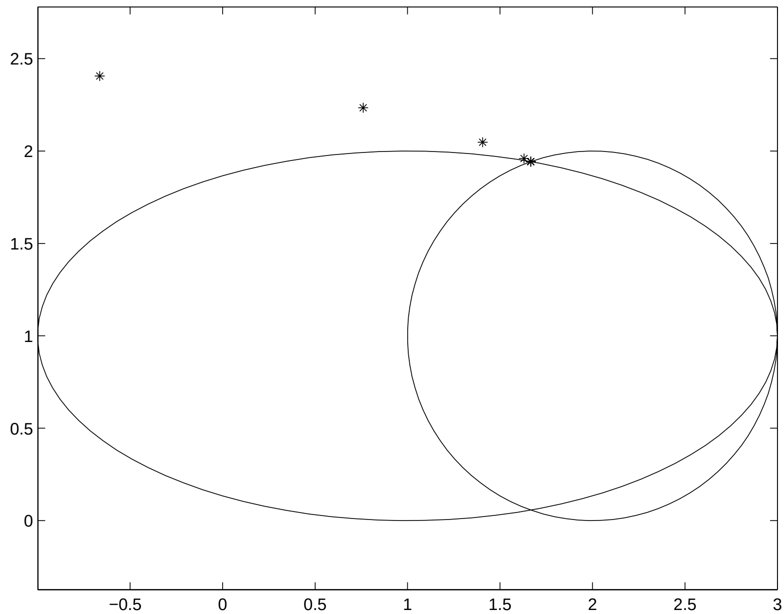
Kurslitteraturen bestod förutom av några egenkonstruerade inledande övningsuppgifter i matlab även av Maplehandboken (Andersson och Nilsson 1995), Matlab Primer (Sigmon 1993), utdrag ur Datorhanboken – UNIX (Andersson 1995), samt sidor på www.

Exempel på inlämningsuppgift

Vid design av den lite större inlämningsuppgiften i Matlab hade kursansvarig (undertecknad) följande designkrav:

- Icketrivial uppgift (svår att lösa utan verktyg)
- Problemställningen lätt att förstå
- Lätt att komma igång
- Kräver att man lär sig verktyget
- **rolig och stimulerande**
- Möjligt att förstå vad som händer (visualisering ?)

De flesta av dessa krav realiserades av en uppgift där man med Newtons metod i två dimensioner hittar skärning mellan en cirkel och en ellips samt illustrerar detta grafiskt enligt exemplet nedan.



Erfarenheter

Under två år har totalt ca 250 studenter genomgått kursen. Dessa är övervägande mycket positiva och förväntar sig få stor behållning av de erhållna kunskaperna. På grund av varierande förkunskaper (matematikkursen i åk 1 på civilingenjörsprogrammen eller motsvarande rekommenderas) har svårighetsgraden på kursen upplevts väldigt olika. Många studenter upplevde Unix-avsnittet som onödigt (de som hade Unix-kunskaper sedan tidigare) eller som mycket arbetsamt och besvärligt (de som aldrig tidigare varit i kontakt med Unix). Detta har fått till följd att Unix-delen utgår inför årets upplaga av kursen samt att en samling lättare Matlab-uppgifter i stället ingår i examinationen. Dessa uppgifter har tidigare år varit rekommenderade till studenterna innan de påbörjar arbetet med inlämningsuppgifterna. På grund av iver (och oförstånd?) struntade dock många studenter i dessa uppgifter vilket fick till följd att inlämningsuppgifterna blev onödigt svåra. Flertalet studenter framförde åsikten att en sådan här kurs borde vara obligatorisk för alla i åk 1.

Som lärare på kursen upplever man att studenterna är mycket motiverade och flitiga. Deras prestation ligger mycket över vad man upplever i t.ex. grundkurser i matematik. Den största anledningen till detta är självklart att denna kurs bara har valts av studenter som är intresserade av ämnet och som tror sig behöva matematik och dess verktyg i sin fortsatta verksamhet. En fråga är därför hur man ska nå ut till de studenter som är mindre intresserade av matematik men som ändå troligen skulle ha stor behållning av en sådan här kurs.

En fördel med en separat kurs för verktygen jämfört med kurser där verktygen integreras med den vanlig undervisningen är att man tillåts att fokusera på hur själva verktygen används. Detta ger möjlighet för studenterna att komma över den kritiska tröskel som gör att de upplever verktygen som en bra hjälp och inte som något ytterligare besvärligt moment i en kurs. Vid integrerade kurser är det oftast något annat som står i centrum och för att kunna studera detta slutar t.ex. en laboration inte sällan med att läraren talar om precis hur ett kommando ska skrivas och hur resultatet ska tolkas. För att studenten ska få egen förtrogenhet med verktyget krävs en kritisk mängd eget experimenterande samt att studenten får tid att göra och själv reda ut en stor mängd misstag.

Då många institutioner idag upplever en ekonomisk åtstramning är det i detta sammanhang intressant att påpeka att kursen i mycket hög grad stimulerar till självverksamhet från studenternas sida. Detta innebär att kostnaden för lärarledd undervisning kan hållas nere samtidigt som kvalitén upprätthålls på en hög nivå.

Referenser

Andersson, L. (1995). Datorhandbok –UNIX. Högskolan i Luleå.

Anderson, G., Nilsson P (1995). Maplehandboken v1.2. Matematiska Institutionen, Lunds Universitet.

Sigmon, K. (1993). Matlab Primer, Third edition. Deparment of Mathematics, University of Florida.

Datorn som experimentverktyg

Anders Tengstrand
Högskolan i Växjö

Sammanfattning

Från undervisningsprojekt vid Högskolan i Växjö, som byggde på kontinuerlig examination, grupparbete och höga krav på muntliga och skriftliga redovisningar, ges här exempel på att datorn kan vara ett effektivt hjälpmedel för att illustrera och motivera även mer teoretiska delar av matematiken.

Inledning

Titeln på denna föreläsning är måhända en aning pretentiös. Men när jag skulle föreslå en rubrik erinrade jag mig att jag sett att datorn kan användas i matematikundervisningen på väsentligen ett av följande tre sätt:

- som räknehjälpmedel
- för att skapa förståelse
- som experimentverktyg för att upptäcka samband.

Det jag tänkte berätta om passar bäst under den tredje rubriken. Naturligtvis är det mycket svårt och kanske olämpligt att i grundutbildningen låta studenterna söka helt nya samband, som ingen förut upptäckt. Detta är till för forskarna. Men man kan ändå ge studenterna relativt öppna frågeställningar och låta dem experimentera med hjälp av datorer. Problemen kan läggas tillrätta så att de själva upptäcker samband, som vi lärare redan känner till. Det blir sedan en utmaning att förklara och diskutera resultaten. Kan de fogas in i en mer generell teori som vi redan känner? Eller kan det vara lämpligt att skapa en ny teori? Kan resultaten bevisas? Vad är i så fall ett bevis?

Genom att studenterna själva funnit samband som de till en början finner en aning förbryllande kan man möjligen motivera dem för de mer teoretiska frågeställningar som karakteriserar det vi kallar riktig matematik.

Jag kommer att ge några exempel på hur vi arbetat med denna typ av problem vid Högskolan i Växjö. Användandet av datorer i vår matematikundervisning var från början inget huvudändamål. Det uppstod som en följd av undervisningsförsök som hade helt andra målsättningar. Jag gör därför först en mycket kort presentation av dessa projekt.

Några undervisningsprojekt

Under 1991–93 genomfördes ett undervisningsprojekt i matematik vid Högskolan i Växjö. En del av projektet, som kallades ”Matematiken i de nya ingenjörsutbildningarna”, syftade till att lägga ökad vikt vid kommunikativa färdigheter och att låta studenterna lösa mer omfattande problem, som inte kan ges på en tentamen. Dessa tankar genomfördes mer radikalt i ett projekt ”Nya examinationsformer för att utveckla studenternas kommunikationsförmåga och kreativitet i datalogi och matematik”, som genomfördes 1996/97. Projekten byggde på

- kontinuerlig examination med obligatoriska inlämningsuppgifter
- grupparbete
- höga krav på muntliga och skriftliga redovisningar.

Båda projekten stöddes av Grundutbildningsrådet och är redovisade i Tengstrand (1994) och Hedenborg och Tengstrand (1997). Arbetsmetoderna har efter försöksverksamhet börjat användas alltmer i matematikundervisningen vid Högskolan i Växjö. De erfarenheter som redovisas i detta föredrag är hämtade från följande kurser:

- inledande analys och linjär algebra för ingenjörsutbildningarna (150 studenter)
- den inledande 20-poängskursen (200 studenter)
- en 5-poängskurs på 21–40-poängsnivå i klassisk geometri (75 studenter).

En väsentlig del av arbetet med denna typ av undervisning är att konstruera lämpliga uppgifter. Det ligger då nära till hands att utforma problem där datorn är ett hjälpmedel. Hos oss var det alltså inte ett mål att använda datorn i matematikundervisningen. Den kom in som en följd av de undervisnings- och examinationsformer som vi bestämt oss för.

De programvaror vi använt har varierat från kurs till kurs. På ingenjörsprogrammen har det varit naturligt att använda Matlab, eftersom denna programvara används genomgående på dessa utbildningar. På 20-poängskursen har vi använt Mathematica och på geometrikursen Geo-meter´s Sketchpad. Vi har givit kortare undervisningspass där vi introducerat programvarorna men det mesta har studenterna fått klara på egen hand med hjälp av s.k. lathundar. Enligt min mening har det i stort sett fungerat bra. Eventuellt kan det bero att en stor del av våra studenter går på datavetenskapliga program och är nyfikna på och vill sätta sig in i nya programvaror.

Några exempel

Jag kommer att illustrera arbetssättet med hjälp av två exempel. Problemen är i båda fallen hämtade från den klassiska geometrin. Visserligen är de flesta av våra inlämningsuppgifter hämtade från andra områden men problem från den klassiska geometrin tydliggör genom sin åskådlighet de frågeställningar jag kommer att diskutera.

Det första problemet har använts både på den inledande 20-poängskursen och på kursen i linjär algebra inom ingenjörsutbildningarna.

Problem 1:

Betrakta en godtycklig triangel och skriv in en cirkel i triangeln. Förbind tangeringspunkterna. Vi får då en ny triangel som har en inskriven cirkel och vi förbinder dess tangeringspunkter och får en ny triangel osv. Bestäm vinklarna i den triangel vi får efter att ha upprepat proceduren en gång, två gånger, tre gånger, tio gånger osv. Vad händer i det långa loppet?

Med hjälp av enkel triangelgeometri får man att sambandet mellan vinklarna A, B och C och vinklarna A_1, B_1 och C_1 i den inskrivna triangeln är:

$$A_1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$$

$$B_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$$

$$C_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

eller med matriser:

$$X_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = TX$$

där T är 3x3-matrisen ovan och X är kolonnmatrisen $(A\ B\ C)^t$. Om vi med X_n betecknar motsvarande kolonnmatris efter det att vi upprepat konstruktionen n gånger så gäller naturligtvis

$$X_n = T^n X \cdot$$

Med hjälp av t.ex. Mathematica är det nu lätt att se att vilken triangel vi än börjar med så är X_n ungefär lika med $(60\quad 60\quad 60)^t$ för stora n är om vi mäter vinklarna i grader. Det är också lätt att se att

$$T^n = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}.$$

för stora n.

Resultaten kan tas som utgångspunkt för en rad frågeställningar som kan diskuteras under redovisningen av uppgiften:

- Kan man geometriskt inse att trianglarna konvergerar mot en liksidig triangel?
- Har vi med Mathematica bevisat att samtliga trianglar konvergerar mot en liksidig triangel?
- Vad skall vi kräva av ett bevis?
- Andra arbetsgrupper har arbetat med helt andra problemställningar som t.ex. Markovkedjor och de har gett upphov till samma matematiska modell. Man vill beräkna potenser av en kvadratisk matris. Bör inte en teori skapas med vars hjälp vi kan beräkna matrispotenser? Finns det matriser där det är lätt att beräkna potenser? Vilka i så fall? Kan det utnyttjas?

Det andra problemet har jag hämtat från kursen Geometri och algebra.

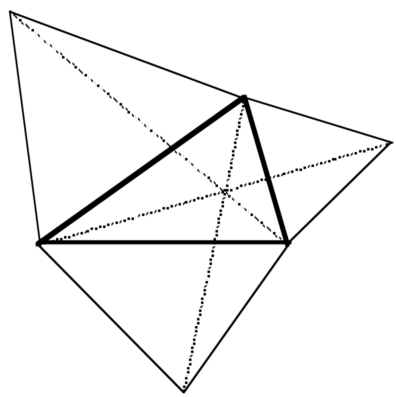
Problem 2:

På var en av sidorna i en godtycklig triangel ritas utåt en liksidig triangel.

a) De nya hörn som uppstår förbinds med motstående hörn i den ursprungliga triangeln. Visa att dessa tre sammanbindningslinjer skär varandra i en punkt (Fermatpunkten).

b) Visa att tyngdpunkterna i de tre liksidiga trianglarna bildar en liksidig triangel (Napoleontriangeln).

Figuren illustrerar Fermats punkt.



Dessa båda problem är intressanta därför att de flesta studenter inte riktigt verkar tro att påståendena är sanna. De ritar först flera figurer med papper och penna och övergår sedan till Geometer´s Sketchpad. Detta ritprogram kan användas för att göra konstruktioner i Euklides´ anda. I vårt fall ritar man först en godtycklig triangel och konstruerar sedan de liksidiga trianglarna och sammanbindningslinjerna mellan hörnen med ”datorpassare” och “datorlinjal”. Det är sedan möjligt att kontinuerligt deformera trianglen medan datorn ”kommer ihåg” konstruktionerna. Studenterna ser att de tre linjerna skär varandra i en punkt i den figur de först ritat och även i alla de figurer som uppstår när triangeln deformeras kontinuerligt.

Efter att ha använt datorprogrammet verkar de flesta studenter tro att de tre linjerna alltid skär varandra i en punkt. Men de flesta kräver också ett mer ”teoretiskt” bevis för att kunna förstå varför det är sant. De anstränger sig för att själva finna ett sådant, men måste i regel få hjälp med någon idé. Den kan till exempel vara en litteraturhänvisning. Lösningen på vissa problem finns också på Internet. Vid en redovisning kan studenterna sedan presentera ett logiskt sammanhängande bevis.

Den typ av frågor som kan diskuteras i samband med redovisningar av problem av denna typ är:

- Vad är ett bevis? Ger Geometer´s Sketchpad ett bevis? Vi kan ju genom att kontinuerligt deformera triangeln kontrollera ett oändligt antal fall.
- Vad får man använda i ett bevis? Hur bygger man deduktivt upp en matematisk teori?
- Vad skall man kräva av ett bevis?
- Hur vet man att ett bevis är korrekt?

Avslutande anmärkningar

Datorn kan vara ett effektivt hjälpmedel för att illustrera och motivera även mer teoretiska delar av matematiken. Den ger studenterna möjligheter att experimentera och upptäcka samband som är svåra att se om man bara har papper och penna. Rätt valda exempel kan skapa behov av bevis för att förstå sammanhang, behov av att bygga upp teorier för att få överskådlighet och förklara samband. Valet av exempel är viktigt. Det måste finnas någon form av överraskningsmoment i de mönster som avslöjas. Det är lättare att känna behovet av ett bevis för oväntade samband än för gamla kända satser som Pythagoras´ sats och satsen om vinkelsumman i en triangel – satser som studenterna sedan länge accepterat.

Jag har funnit att i den klassiska geometrin finns många problem som stimulerar studenternas nyfikenhet. Klassisk geometri är knappast något som tillämpade ämnen har så stor glädje av men min erfarenhet är att den tilltalar många genom sin enkelhet och genom sin åskådlighet. Den erfarenheten fick jag för övrigt redan under min tid som lärare i grundskolan på 60-talet. Ett annat sådant område är talteori, som man inte heller i första hand förknippar med tillämpningar. Att med hjälp av bl.a. datorn göra experiment inom klassiska delar av matematiken som geometri och talteori kan vara en investering för att bättre förstå de mer komplicerade teorier, t.ex. analys och linjär algebra, som tillämpningarna kräver.

Referenser

Tengstrand, A. (1994). *Matematiken i de nya ingenjörsutbildningarna.* Institutionen för matematik, statistik och datavetenskap. Högskolan i Växjö.

Hedenborg, M. & Tengstrand, A. (1997). *Nya examinationsformer för att förbättra studenternas kommunikationsförmåga och kreativitet i matematik och datalogi*. Institutionen för matematik, statistik och datavetenskap. Högskolan i Växjö.

Datoranvändning i grundläggande matematikundervisning vid Umeå universitet

Peter Wingren
Umeå universitet

Sammanfattning

Mitt föredrag i Sigtuna var uppdelat i tre kortare avsnitt och ett längre. De kortare utgjordes av en översikt av datoranvändningen i matematik i Umeå i kvantitativa och kvalitativa termer, en summarisk beskrivning av ett distansundervisningsprojekt som kallas Pajalaprojektet, samt lite information om Problemlösning med dator – en matematikkurs på C-nivå. Det längre avsnittet handlade om fraktaler i teori och tillämpningar, ett exempel på en tänkbar introduktion till en kurs i linjär algebra eller till ett projektarbete om fraktaler.

Översikt av datoranvändning i matematik vid Umeå universitet

Läsåret 94/95 och tidigare förekom viss användning av Mathematica på civilingenjörsutbildningarna i teknisk fysik (Tefy) och teknisk datavetenskap.

Under läsåret 95/96 började vi successivt att införa datorlaborationer på våra matematikkurser. Höstterminen inleddes för lärarnas del med en obligatorisk kurs i Maple (10 timmars nedsättning per lärare) och för studenternas del med en introduktion i *datorkunskap och Maple* på 1–2 timmar. Vi beslöt också att studenterna skulle ha två stycken 2–3-timmarspass med enkla laborationer på varje 5-poängsmoment under Matematik A och att två av kurserna på Matematik B skulle innehålla laborationer. Under året började vi också planera för att göra om matematikundervisningen för teknisk fysik så att 20 % skulle utgöras av datorlaborationer.

Under 96/97 genomfördes planerna som utarbetats under 95/96. Det innebar att 6 poäng av de drygt 30 som är obligatoriska på Tefy görs som

”Maple-poäng”. Från detta år kan vi säga att 40 % av våra 750 nybörjare får någon form av datorundervisning innan de lämnar oss.

Under 97/98 har vi trots institutionens ekonomiska svårigheter nästan lyckats hålla datorundervisningen på samma kvantitativa nivå som under föregående läsår.

Utöver ovanstående vill jag tillägga att framgång i arbetet med att införa användandet av datorer i undervisningen gynnats av att vi haft några eldsjälar bland lärarna, duktiga doktorander och att 90 % av lärarna varit positiva. Viktigt har också varit att vi fått mycket erfarenhet från det stora datorinslaget på Tefy. Vi har också tillgodogjort oss erfarenheter från andra universitet.

Pajalaprojektet

Fyrtio-femtio mil norr om Umeå ligger Pajala. Det är ett litet samhälle med framtidstro och initiativkraft. Pajala har företag som behöver ingenjörer men för få ingenjörer finns att få. Med hjälp av nationell och lokal satsning och EU-pengar drivs här ett utbildningsprojekt där Umeå universitet ansvarar för utbildning av 25–40 ingenjörer. Utbildningen börjar med att studenterna bygger sin egen dator. Matematiska institutionen svarar för undervisningen i matematik på 10 poäng. Undervisningen sker på distans från Umeå kompletterad med handledning av lokal (skicklig) lärare. Kontinuitet i undervisning och lärande skapas med föreläsningar, lektioner och kommunikation i datornätverk. Föreläsningar äger rum i stort sett varannan dag med hjälp av videokonferenssystem. Kommunikationen är tvåvägs. I Umeå finns två kameror, en riktad mot lärare+tavla och en mot eventuella dokument. I Pajala finns en till två kameror riktade mot studenterna. Ljudet går i båda riktningarna. I datornätverket använder vi ”Net-meeting”. Det ger varje person i nätverket, dvs. studenterna och de två undervisande lärarna, möjlighet att rita på en digitaliseringsplatta och samtalspartnern ser vad man ritar. Studenten som samtalar med Umeå-läraren ser dessutom läraren på sin egen bildskärm (med hjälp av en liten videokamera). Under utbildningens gång får studenterna stifta bekantskap med Matlab. Det mesta pekar på att projektet är mycket lyckat.

Matematisk problemlösning med dator

Kursen Matematisk problemlösning med dator utvecklades av Leif Persson, dels under vt -95 och dels under kursens gång sommaren -95. (Per-Anders

Boo och Peter Wingren stod under första året för en del av kursen). Inför sommarkursen -96 lade Leif ut allt kursmaterial på sin hemsida. Några studenter läste faktiskt kursen på distans. På hemsidan finns arbetsblad som man kan hämta hem och använda. Tentamen skedde dels vid terminal (tre timmar med alla hjälpmedel) och dels genom genomförande av ett projektarbete. Tredje sommaren (dvs. 1997) var antalet anmälningar till kursen mycket stort. Vi tog in många studenter men då de registrerats (dvs. kvalificerat sig för studiemedel) försvann ca hälften spårlöst. De som gått kursen färdigt under de tre åren har varit mycket nöjda.

Vi har nu kursen som en av våra vanliga C-kurser. Vi har också diskuterat att ha den som en B-kurs.

Fraktaler i teori och tillämpning

Jag tror att en beskrivning av fraktaler och deras tillämpningar kan vara en utmärkt introduktion till en kurs i linjär algebra eller till ett projektarbete. Jag gav därför exempel på en sådan introduktion och berättade så här:

> Ett par år efter min disputation åkte jag på ett postdoc-år till Georgia Tech i Atlanta. Jag åkte för att lära av och samarbeta med en forskargrupp som sysslade med fraktal geometri. Då jag anlände till Atlanta visade det sig att gruppens tre mest framstående företrädare lämnat universitetet och startat ett företag, Iterated Systems. Detta var år 1990. Då jag åter besökte Georgia Tech våren 1997 hade företaget ca 100 personer anställda. Fråga: **Hur kan tre rena matematiker bli 100 industrimatematiker på endast sju år?**
>
> Svaret är linjär algebra och fraktal geometri.

Därefter ställde jag fyra frågor

1) Vad är en fraktal?,
2) Varför är fraktalerna intressanta för naturvetare?,
3) Vilka är fraktalernas historiska rötter? och slutligen
4) Vad gör de 100 tillämpade matematikerna vid Iterated Systems?

För att besvara *fråga 1* visade jag ett forskningsinformationsmaterial om fraktaler av Wingren och Nilsson (1998). Materialet förklarar begrepp som *självlikformighet, starkt sönderbruten* och *fraktal dimension* utifrån några klassiska fraktaler. Förståelsen underlättas av animeringar.

För att besvara *fråga 2* konstaterade jag först att det under föregående år skrevs mer än 3 000 vetenskapliga arbeten om naturvetenskap som använde sig av fraktal geometri. Sedan utgick jag från en artikel i *Nature* av Morse, Lawton, Dodson och Williams (1985). Jag gjorde en stark popularisering av innehållet för att visa att antalet insekter som lever på viss vegetation är en funktion av vegetationens fraktala dimension.

Fråga 3 besvarade jag genom att berätta om några avgörande resultat av Cantor, Lebesque, Caratheodory och Hausdorff och Banach. I och med Hausdorffs generalisering av Caratheodorys resultat fanns egentligen det väsentligaste för att utveckla och samtidigt tillämpa den fraktala teorin i vår fysiska verklighet. Redan på 1930-talet fanns alltså det fraktala fröet fullt färdigt för utveckling men det blev sovande till 70- och 80-talen.

Slutligen besvarade jag *fråga 4* genom att beskriva vad matematikerna vid Iterated Systems sysslar med, fraktal bildkomprimering. Det senare kan man läsa om i en bok av Yuval Fisher (Fisher 1994). Det är en utmärkt bok. I den beskrivs grundprincipen för tekniken med fraktal bildkomprimering. Utgående från en given bild låter man via matematiska transformationer (exekverade av datorn) delar av bilden flyta runt samtidigt som den förminskas, roteras, speglas och förändras med affina avbildningar som dessutom är kontraktioner. Under denna rörelse och förändring av bildelementet jämför man med den underliggande bilden och bokför stora överensstämmelser. Det man gör under denna process är i själva verket att kartlägga bildens självlikformighet. Om man genomför ovanstående process för hela bilden har man som slutresultat ett antal transformationer som innehåller nästan all information som fanns i bilden. De matematiska transformationer som visade överenstämmelsen (självlikformigheten) sparas. Istället för att sända bilden kan man nu sända motsvarande mindre utrymmeskrävande matematiska formler. Att allt detta fungerar förklaras av en välkänd matematisk sats, kontraktionssatsen .

Referenser

Fisher, Y. (1995). *Fractal Image Compression.* New York: Springer Verlag

Morse, D., Lawton, J., Dodson, M. & Williamson, M. (1985). Fractal dimension of vegetation and the distribution of arthropod body lengths. *Nature, vol. 314*, 731–734.

Persson, L. (hemsida) Leif.Persson@math.umu.se

Wingren P. och Nilsson A. (hemsida) http://www.math.umu.se/fo_info/fraktaler/index.html

Posterpresentationer

Vad karakteriserar bra labuppgifter i matematik?

Christer Bergsten, Linköpings universitet

Sammanfattning

Hösten 1992 började vi i Linköping med datorlabbar till den inledande analyskursen för Y-linjen inom civilingenjörsutbildningen, med stöd av Grundutbidningsrådet. (Bergsten, 1994) Det program som användes var Maple, och labbarna har ungefär samma form idag. I denna poster ges exempel på några labuppgifter som använts. Syftet med postern är att diskutera vad som karakteriserar bra labuppgifter.

Bergsten, C. (1994). Symbolic computing and mathematics education. *LiTH-MAT-R-94-30*, Department of Mathematics, Linköping University.

Matematik med dator, 3p

Klas Forsman, Sam Lodin & Per Åhag, Mitthögskolan

Sammanfattning

I denna poster beskrivs en kurs *Matematik med dator* (3 p), given inom högskoleingenjörsprogrammen 120 p vid Mitthögskolan 1997/98, med utvärdering och några exempel på övnings- och inlämningsuppgifter. Programmet som användes var Maple.

Lekfulla övningar inför algebran i grundskolan

Barbro Grevholm, Högskolan i Kristianstad

Sammanfattning

Innan lärare går in på egentlig undervisning om algebra i grundskolan brukar de introducera lekfulla övningar för att förbereda begreppen variabel, värdetabell, formel och funktion. Med kalkylprogram kan dessa övningar göras mer laborativa för eleverna. Exempel på sådana övningar kommer att visas.

Datorstöd för begreppsbildning i matematik inom ingenjörsutbildningen

Owe Kågesten, Linköpings universitet

Sammanfattning

I denna poster presenteras resultatet av projektet *Computer aided formation of conceptions in mathematics for engineering education* finansierat av Grundutbildningsrådet.

Se webbsidan *http://www.hgur.se/general/projects/kogesten.htm*

Adresser till medverkande

Göran Andersson
KTH, Ingenjörsskolan i Kista
Electrum 213
SE-164 40 KISTA
goeran@isk.kth.se

Christer Bergsten
Matematiska institutionen
Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping
chber@mai.liu.se

Morten Blomhøj
IMFUFA Roskilde Universitets-center
P.O. Box 260
DK-4000 Roskilde
morten@mmf.ruc.dk

Kerstin Ekstig
Matematiska institutionen
Uppsala universitet Box 480
SE-751 06 Uppsala
kerstin@math.uu.se

Klas Forsman
Institutionen för fysik och matematik
Mitthögskolan
SE-851 70 Sundsvall
klas.forsman@fmi.mh.se

Barbro Grevholm
Institutionen för matematik och naturvetenskap
Högskolan Kristianstad
SE-291 88 Kristianstad
barbro.grevholm@mna.hkr.se

Mikael Holmquist
Institutionen för pedagogik och didaktik
Enheten för ämnesdidaktik
Göteborgs universitet Box 300
SE-405 30 Göteborg
mikael.holmquist@ped.gu.se

Anders Holtsberg
Institutionen för matematisk statistik
Lunds universitet Box 118
SE-221 00 Lund
andersh@maths.lth.se

Bo I Johansson
Matematiska institutionen
Chalmers/Göteborgs universitet
SE-412 96 Göteborg
bo@math.chalmers.se

Owe Kågesten
Institutionen för teknik och naturvetenskap
Campus Norrköping
Linköpings universitet
SE-601 47 Norrköping
oweka@itn.liu.se

Colette Laborde
Laboratoire IMAG-Leibniz
Université Joseph Fourier - CNRS
46 avenue Félix Viallet
FR-380 31 Grenoble Cedex 1
colette.laborde@imag.fr

Thomas Lingefjärd
Institutionen för pedagogik och didaktik
Enheten för ämnesdidaktik
Göteborgs universitet Box 300
SE-405 30 Göteborg
thomas.lingefjard@ped.gu.se

Sam Lodin
Institutionen för fysik och matematik
Mitthögskolan
SE-851 70 Sundsvall
sam.lodin@fmi.mh.se

Gísli Másson
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
SE-106 91 Stockholm
gisli@matematik.su.se

Ingemar Nåsell
Institutionen för matematik
Kungliga tekniska högskolan
SE-100 44 Stockholm
ingemar@math.kth.se

Esbjörn Ohlsson
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
SE-106 91 Stockholm
esbj@matematik.su.se

Håkan Sollervall
Matematiska institutionen
Uppsala universitet Box 480
SE-751 06 Uppsala
soller@math.uu.se

Inge Söderkvist
Institutionen för matematik
Luleå tekniska universitet
SE-971 87 Luleå
inge@sm.luth.se

Anders Tengstrand
Institutionen för matematik, statistik och data
Växjö universitet
SE-351 95 Växjö
anders.tengstrand@masda.vxu.se

Peter Wingren
Matematiska institutionen
Umeå universitet
SE-901 87 Umeå
peter.wingren@math.umu.se

Per Åhag
Institutionen för fysik och matematik
Mitthögskolan
SE-851 70 Sundsvall
per.ahag@fmi.mh.se

Högskoleverkets skriftserie

Etnologiutbildningen – En utvärdering
Högskoleverkets skriftserie 1995:1 S

Multimedia och informationsteknologi i språkutbildningen vid universitet och högskolor i Sverige
Högskoleverkets skriftserie 1996:1 S
Kontrakt och utvärdering vid franska universitet – Rapport från en studieresa
Högskoleverkets skriftserie 1996:2 S

Financing and Effects of Internationalised Teaching and Learning
Högskoleverkets skriftserie 1996:3 S

Organizing Innovation – An Evaluation Report on the Work of the Swedish Case Method Centre
Högskoleverkets skriftserie 1996:4 S

Gender-inclusive Higher Education in Mathematics, Physics and Technology
Högskoleverkets skriftserie 1996:5 S

1993 års högskolereform – Vad blev det av den? Sju vittnesmål efter tre år
Högskoleverkets skriftserie 1996:6 S

Quality Assessment – The Australian Experiment
Högskoleverkets skriftserie 1996:7 S

Quality assurance as support for processes of innovation – The Swedish model in comparative perspective
Högskoleverkets skriftserie 1997:1 S

Grundläggande högskoleutbildning: Politik och planering eller den osynliga handen i full verksamhet?
Högskoleverkets skriftserie 1997:2 S

Uppfattningar om examination – en intervjustudie av högskolelärare
Högskoleverkets skriftserie 1997:3 S

Kvalitet och förbättringsarbete vid universitet och högskolor – Föredrag vid en konferens i Uppsala 9–10 januari 1997
Högskoleverkets skriftserie 1997:4 S

Studenters upplevelser av examinationen – om hur högskolestuderande retrospektivt ser på examinationen vid högskolan
Högskoleverkets skriftserie 1997:5 S

Prefekter om effekter – en studie av auditprosesser i sverige
Högskoleverkets skriftserie 1997:6 S

Förnyelse av grundutbildningen i fysik vid universitet och colleges i USA
Högskoleverkets skriftserie 1997:7 S

National Policies for the Internationalisation of Higher Education in Europe
Högskoleverkets skriftserie 1997:8 S

Examensarbetet – examination och genomförande
Högskoleverkets skriftserie 1997:9 S

Examination vid universitet och högskolor – ur studentens synvinkel
Högskoleverkets skriftserie 1997:10 S

Extern medverkan i examinationen – Nordiska och brittiska traditioner. Svenska försök
Högskoleverkets skriftserie 1997:11 S

En auktoritär prövning eller en prövning av auktoritet? – Examination vid universitet och högskolor
Högskoleverkets skriftserie 1997:12 S

Tillträde till högre utbildning – en evighetsfråga
Högskoleverkets skriftserie 1997:13 S

Råd och idéer för examinationen inom högskolan
Högskoleverkets skriftserie 1997:14 S

Costs of Study, Student Income and Study Behaviour in Sweden
Högskoleverkets skriftserie 1998:1 S

External ralations as support for internal renewal
Högskoleverkets skriftserie 1998:2 S

Recruiting Female Students to Higher Education in Mathematics, Physics and Technology – An Evaluation of a Swedish Initiative
Högskoleverkets skriftserie 1998:3 S

Hur styrs den svenska högskolan? Varför ser styrsystemet ut som det gör?
Högskoleverkets skriftserie 1998:4 S

Praktisk problemlösning
Högskoleverkets skriftserie 1998:5 S

På väg – erfarenheter av vårdhögskoleutbildning i samverkan landsting/stat
Högskoleverkets skriftserie 1998:6 S

Europa runt på 8 dagar eller på spåren från Bosporen
Högskoleverkets skriftserie 1998:7 S

Mästarprov eller mardröm – Studenters uppfattningar om examination av självständigt arbete
Högskoleverkets skriftserie 1998:8 S

CAL-laborate – A collaborative publication on the use of Computer Aided Learning for tertiary level physical sciences
Högskoleverkets skriftserie 1998:9 S

The Current Swedish Model of University governance – Background and Description
Högskoleverkets skriftserie 1998:10 S

Framgång måste ständigt vinnas på nytt – En bedömning av Högskoleverket
Högskoleverkets skriftserie 1998:11 S

Evaluation of short-term CALL projects 1997/98
Högskoleverkets skriftserie 1999:1 S

Ett särskilt handlag
Högskoleverkets skriftserie 1999:2 S

Multimedia och filmundervisning
Högskoleverkets skriftserie 1999:3 S

I skriftserien finns utredningar och analyser som utförts på Högskoleverkets uppdrag. Innehållet speglar inte nödvändigtvis verkets uppfattning.

Högskoleverkets skriftserie 1999:4 S
ISSN 1400-9498
ISRN HSV-SS--99/4--SE

Högskoleverket är en central myndighet för frågor som rör universitet och högskolor. Verket arbetar med kvalitetsbedömningar, uppföljningar, utveckling av högre utbildning, utredningar, tillsyn, internationella frågor och studieinformation. Dessutom ansvarar verket för samordningen av det svenska universitetsdatornätet SUNET.

HÖGSKOLEVERKET
National Agency for Higher Education